dr hab. Grzegorz Łysik
Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Katedra Matematyki
ul. Uniwersytecka 7, 25-406 Kielce

22 lutego 2021 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Huberta Grzebuły

# Funkcje poliharmoniczne na euklidesowych kulach obróconych

**Wstęp.** Funkcje harmoniczne czyli rozwiązania operatora Laplace'a są podstawowymi obiektami badanymi w teorii eliptycznych równań różniczkowych cząstkowych. Ich własności są dobrze znane. Mniej znane są własności funkcji poliharmonicznych czyli rozwiązań iteracji operatora Laplace'a. Tym nie mniej były one badane przez wielu znanych matematyków, m. in. przez Aronszajna, Creese, Lipkina, Begehra, Wanga, Gazzolę, Grunau, Sweersa i innych. W większości prac funkcje poliharmoniczne badane są w dziedzinie rzeczywistej. Przykładowo zagadnienie Dirichleta polega na znalezieniu funkcji poliharmonicznej w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dla której wartości funkcji na brzegu obszaru zadane są przez iteracje operatora Laplace'a. Tego typu zagadnieniom jest poświęcona monografia Gazzoli, Grunau i Sweersa *Polyharmonic boundary value problems*. W swojej pracy doktorskiej Hubert Grzebuła w badaniach funkcji poliharmonicznych wychodzi z przestrzeni rzeczywistej do zespolonej. Wyjście w badaniach funkcji poliharmonicznych do przestrzeni zespolonej jest naturalne gdyż wiadomo, że funkcje poliharmoniczne w $\Omega$ są funkcjami rzeczywisto-analitycznymi, a więc przedłużają się do funkcji holomorficznych w zespolonym otoczeniu $U$ zbioru $\Omega$. W szczególności zagadnienie Dirichleta polega teraz na znalezieniu funkcji poliharmonicznej w $\Omega$ takiej, że jej przedłużenie holomorficzne przyjmuje zadane wartości na zespolonych obrotach brzegu zbioru $\Omega$. Badanie tego typu zagadnienia zostało zaproponowane przez autora niniejszej recenzji na seminariach w Instytucie Matematycznym PAN i na Politechnice Warszawskiej w roku 2015. Badania te zostały podjęte przez H. Grzebułę i S. Michalika w artykule *A Dirichlet type problem for complex polyharmonic functions*, kontynuowane w ich artykule *Spherical polyharmonics and Poisson kernels for polyharmonic functions* oraz w artykule G. Grzebuły *The polyharmonic Bergman space for the union of rotated unit balls.* Te trzy artykuły stanowią bazę recenzowanej rozprawy doktorskiej. Z oświadczeń Huberta Grzebuły i jego promotora Sławomira Michalika wynika, że wkład doktoranta w powstanie pierwszego z tych artykułów wynosi 70%, natomiast drugiego 50%.

**Omówienie rozprawy.** Rozprawa rozpoczyna się Wstępem, w którym omówiona jest motywacja prowadzonych badań i przedstawione są główne rezultaty.

Rozdział pierwszy zawiera przypomnienie podstawowych informacji dotyczących funkcji harmonicznych i poliharmonicznych oraz pojęcie sfery i kuli Liego. W Przykładzie 1.1 Autor wykazuje, że sfera Liego nie jest całym brzegiem kuli Liego. Następnie za monografią [1] przytoczony jest dowód rozwinięcia Almansiego funkcji poliharmonicznej w kuli jednostkowej. W Lemacie 1.1 Autor wykazuje, że funkcja poliharmoniczna na kuli jednostkowej przedłuża się na kule obrócone, a następnie zauważa, że jest to konsekwencja twierdzenia Siciaka z pracy [26] o rozszerzeniu funkcji harmonicznej w kuli do kuli Liego. Warto w tym miejscu zauważyć, że twierdzenie to zostało wcześniej anonsowane przez N. Aronszajna w pracy *Preliminary notes for the talk „Traces of analytic solutions of the heat equation"*, Proceedings of the Colloquium on Linear Partial Differential Equations, Paris, 1973, pp. 5-34, a dowód ukazał się w jego pracy *General Cauchy Formulas in* $\mathbb{C}^n$, Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. no 25, p. 1-28.

Głównym wynikiem Rozdziału drugiego jest Twierdzenie 2.1, w którym podany jest wzór na rozwiązanie problemu Dirichleta dla iteracji operatora Laplace'a na kuli jednostkowej z danymi na układzie obróconych sfer. Dowód tego twierdzenia polega na sprowadzeniu problemu do układu problemów Dirichleta dla laplacjamu z danymi na obróconych sferach. W tym celu w Lemacie 2.1 została podana wygodna forma rozwinięcia Almansiego. Z oświadczenia H. Grzebuły wynika, że jest wynik uzyskany przez niego samodzielnie. W Przykładach 2.2 i 2.3 Autor rozwiązuje konkretny problem Dirichleta dla bilaplacjanu dwoma metodami, raz szukając rozwiązania w postaci szeregu Fouriera, a drugi w oparciu o Twierdzenie 2.1. Ten drugi sposób wymagał przeprowadzenie dość żmudnych rachunków, lecz nie wszystkie z nich zostały zamieszczone w pracy. Z Twierdzenia 2.1 Autor wyprowadza, we Wniosku 2.2, własność wartości średniej dla funkcji poliharmonicznych (uzyskaną wcześniej innymi metodami przez G. Łysika w [15] i S. Michalika w [18]) oraz, we Wniosku 2.3, wzór na rozwiązanie zewnętrznego zagadnienia Dirichleta.

Rozdział trzeci poświęcony jest badaniu jednorodnych wielomianów poliharmonicznych, poliharmonik sferycznych i strefowych (angielska nazwa *zonal*). Następnie wyprowadzony jest wzór na poliharmoniczne jądro Poissona dla sumy obróconych kul, Twierdzenie 3.4, i badane są jego własności, Stwierdzenie 3.11, a także zastosowanie do rozwiązania problemu Dirichleta, Twierdzenie 3.5. Wykazane jest także, że ciąg funkcji poliharmonicznych zbieżny niemal jednostajne na sumie obróconych kul jest zbieżny do funkcji poliharmonicznej. Rozdział kończą wyrażenia poliharmonicznego jądra Poissona i poliharmonik strefowych w terminach wielomianów Gegenbauera, Stwierdzenie 3.14 i Twierdzenie 3.6, i wielomianów Legendre'a, strona 66. Z oświadczenia Autora wynika, że jego samodzielny wkład polegał na: uogólnieniu pojęcia biharmonic na poliharmoniki sferyczne i wyprowadzeniu ich własności; wyrażeniu poliharmonik strefowych w terminach harmonik strefowych; wyprowadzeniu wzoru na poliharmoniczne jądro Poissona i podaniu jego własności; wyprowadzeniu jawnego wzory na poliharmoniki strefowe. Teoria prezentowana w tym rozdziale jest przeniesieniem teorii z Rozdziału 5 monografii *Harmonic Function Theory* Axlera, Bourdona i Ramey'a na funkcje poliharmoniczne.

Z kolei Rozdział czwarty rozprawy jest przeniesieniem rozdziału ósmego wyżej wymienionej monografii. Na początku rozdziału wprowadzona jest przestrzeń Bergmana funkcji poliharmonicznych na sumie obróconych kul całkowalnych z kwadratem. Ponieważ jest to przestrzeń Hilberta, więc można zdefiniować poliharmoniczne jądro Bergmana, którego własności Autor opisuje w Stwierdzeniu 4.3. Następnie w Twierdzeniu 4.1 poliharmoniczne jądro Bergmana jest wyrażone w terminach poliharmonik strefowych, w Twierdzeniu 4.1 podany jest jego jawny wzór, a w Twierdzeniu 4.3 jego związki z harmonicznym jądrem Bergmana i harmonicznym jądrem Poissona. W ostatnim podrozdziale, badane jest ważone poliharmoniczne jądro Bergmana z wagą $|\cdot|^{\alpha}(1-|\cdot|)^{\beta}$ gdzie $\alpha > -n$, $\beta > -1$. Rozważanie takiej wagi jest motywowane pracą Tanaki [28]. W Twierdzeniu 4.4 podany jest wzór na ważone poliharmoniczne jądro Bergmana w terminach poliharmonik strefowych, a w Twierdzeniu 4.5 w terminach poliharmonicznego jądra Poissona przy użyciu pochodnych ułamkowych.

Rozdział piąty rozprawy poświęcony jest funkcjom holomorficznym na kuli Liego. W Stwierdzeniu 5.2 wykazane jest, że jądro Cauchy-Hua jest granicą poliharmonicznych jąder Poissona. Natomiast Twierdzenie 5.1 i jego dowód podaje metodę konstrukcji ciągu funkcji poliharmonicznych na kuli Liego przybliżających daną funkcję holomorficzną na tejże kuli. Jako wniosek wyprowadzona jest własność wartości średniej dla funkcji analitycznych (otrzymana wcześniej w pracy [15] jako wniosek ze wzorów Pizzettiego).

Rozprawę kończy rozdział Uwagi końcowe, w którym sformułowane są pewne pytania, problemy i hipotezy badawcze.

**Uwagi redakcyjne.**

W wielu wzorach brakuje informacji dla jakich argumentów dane funkcje są określone.
W wierszu $10_{11}$ powinno być [18] zamiast [21].
Przy wyprowadzeniu wzoru (1.2) brak jest wzoru na $\Delta(\rho^{2k})$.
W połowie strony 23 Autor pisze *wykonując odpowiedni rachunek* zamiast po prostu „dzieląc przez $1/(2k)$".
Dobrze byłoby podać motywacje wzoru (2.8).
Wzór (2.11) wyraża własności pierwiastków z jedynki.
Wiersz $32_6$. We wzorze (2.3) jest $\sum_{k=0}^{p-1}$, a nie $\sum_{k=1}^{p}$?
Wiersze $34^1$ i $35^1$. Lepiej byłoby podać te rachunki.
Wiersz $49^6$. Jeśli $\gamma$ jest wielokrotnością $p$, to mamy $\frac{0}{0}$.
W Definicji 3.5 powinno się dodać „o ile całka istnieje".
W wierszu $46_9$, $n$ ma dwa różne znaczenia.
Wiersz $66^8$. We wzorze powinno być $|x|^m|\bar{\zeta}|^m$.
Wiersz $68^{11}$. ... dla $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(B) \cap L^2(B)$.
Stwierdzenie 4.4. ... $u \in \mathcal{H}_m^p$, $v \in \mathcal{H}_l^p$.

**Konkluzja.** W mojej opinii praca doktorska mgr. Huberta Grzebuły stanowi *istotny wkład* do teorii poliharmonicznych w dziedzinie zespolonej. Autor *wykazał szeroką wiedzę i umiejętności* w badaniu rozważanych problemów. Przedstawione w ostatnim rozdziale otwarte pytania i problemy *dobrze rokują* na jego dalszą działalność badawczą.

Uważam, że rozprawa doktorska mgr. Huberta Grzebuły *spełnia* ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawą doktorskim, w szczególności: rozprawa prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w dyscyplinie matematyka oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej jej autora, do rozprawy doktorskiej dołączone są streszczenia w języku polskim i angielskim. Mgr Hubert Grzebuła posiada w dorobku 3 artykuły naukowe opublikowane w czasopismach naukowych ujętych w wykazie Ministerstwa.

Wobec powyższego *wnioskuję* o dopuszczenie mgr. Huberta Grzebuły do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Łysik G.

Grzegorz Łysik