prof. dr hab. Krzysztof Chełmiński
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska
ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa

Warszawa 22 luty 2022

Recenzja rozprawy doktorskiej

Rozwiązania formalne i analityczne równań moment-różniczkowych cząstkowych

autorstwa pani magister *Marii Suwińskiej*

Pani magister Maria Suwińska jest absolwentką Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie i swoją pracę magisterską *Rozwinięcia hiperasymptotyczne dla rozwiązań równania przewodnictwa cieplnego* obroniła pod opieką dr hab. Sławomira Michalika w 2017 roku. Następnie została słuchaczką studiów doktoranckich na macierzystej uczelni, których zwieńczeniem jest złożona do oceny rozprawa doktorska *Rozwiązania formalne i analityczne równań moment-różniczkowych cząstkowych* napisana pod opieką dr hab. Sławomira Michalika. Wartym podkreślenia jest fakt, że pani magister Maria Suwińska ma już całkiem spory dorobek naukowy: 6 publikacji w niezłych czasopismach naukowych oraz kilka odczytów na międzynarodowych konferencjach naukowych. Przejdę do omówienia rozprawy doktorskiej. Rozprawa ta składa się z trzech rozdziałów wprowadzających czytelnika w analizowane dalej problemy, trzech rozdziałów zasadniczych, w których rozważane są równania moment-różniczkowe cząstkowe oraz z rozdziału prezentującego otwarte jeszcze problemy i kierunki dalszych badań. Całość kończy się rozdziałem, który można nazwać dodatkiem zawierającym kilka technicznych wyników wykorzystywanych w rozprawie.

Rozdział pierwszy wprowadza klasy szeregów formalnych o wartościach w przestrzeni Banacha E. Z dalszej części rozprawy wynika, że E jest nad ciałem liczb zespolonych. Ponadto wprowadza się pojęcia sektorów i obszarów sektorowych, które odgrywają fundamentalną rolę w rozprawie. Trochę dziwna jest Definicja 1.2, w której pojawia się majoranta szeregu formalnego. To co dziwi czytelnika to sumy skończone użyte w tej definicji. Przypuszczam jednak, że to tylko literówka.

Rozdział drugi wprowadza funkcje jądrowe e i E oraz związaną z nimi funkcję momentów m rzędu $k > 1/2$ a następnie rzędu $k > 0$. Najbardziej znaną trójką funkcji e, m, E to $e(z) = e^{-z}$, $m(u) = \Gamma(1 + u)$ oraz $E(z) = \mathbb{E}(z)$, gdzie $\mathbb{E}$ to funkcja Mittag-Lefflera. Ponadto pojawia się też definicja silnych funkcji jądrowych i regularnych funkcji momentów. Dalej rozdział ten wprowadza kolejne kluczowe pojęcia wykorzystywane w rozprawie m-transformatę Laplace'a (uogólnienie znanej transformaty Laplace'a) i m-transformatę Borela będącą odwrotnością m-transfromaty Laplace'a. Bardzo ważnym w rozprawie jest rozszerzenie działania tych transformat na szeregi formalne. Działanie obu transformat na szeregach formalnych sprowadza się do mnożenia lub dzielenia współczynników szeregu przez wyrazy ciągu momentów $m(n)$. Zatem obie transformaty są dobrym narzędziem do badania szeregów formalnych. Następny ważny krok to wprowadzenie operatorów m-różniczkowych przy ustalonym ciągu momentów. Definicja formalna jest wprowadzona w klasie szeregów formalnych i naśladuje działanie operatora pochodnej na szeregu potęgowym, to znaczy

$$\partial_{m,z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{m(n)}z^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_{n+1}}{m(n)}z^n .$$

Bardzo podobnie definiuje się operator $\partial_{m,z}^{-1}$. Ważnym spostrzeżeniem jest fakt, że gdy $m(n)=\Gamma(1+n)$ to operator $\partial_{m,z}$ jest zwykłym różniczkowaniem. Natomiast gdy $m(n)=\Gamma(1+sn)$ gdzie $s>0$ to operator $\partial_{m,z}$ jest pochodną ułamkową Caputo, której używa się w wielu modelach fizyki matematycznej przy opisie zjawisk nielokalnych.

Rozdział trzeci wprowadza kolejne kluczowe w rozprawie pojęcie rzędu Gevrey'a szeregu formalnego. Definicja odnosi się do tranfsormaty Borela szeregu formalnego, ale z udowodnionych własności jest ona równoważna następującemu oszacowaniu wyrazu ogólnego szeregu

$$\exists_{C,B>0}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\qquad \|u_n\|_E\le BC^n\Gamma(1+sn)$$

i wtedy liczba s jest rzędem Gevrey'a szeregu formalnego $\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^n$. Rozdział ten wprowadza też klasę szeregów formalnych będących rozwinięciami asmptotycznymi funkcji holomorficznych na pewnym obszarze sektorowym o wartościach w E. Analizowane są także własności operatora J przyporządkującego funkcji holomorficznej f jej rozwinięcie asymptotyczne. Okazuje się , że operator ten nie jest różnowartościowy. Dalej w rozdziale tym pojawia się pojęcie rozwinięcia asymptotycznego rzędu Gevrey'a s funkcji holomorficznej. Okazuje się, że teraz operator, który funkcji holomorficznej posiadającej rozwinięcie asymptotyczne rzędu Gevrey'a s jej rozwinięcie asymptotyczne jest już różnowartościowe gdy dodatkowo kąt rozwarcia obszaru sektorowego jest większy niż $s\pi$ (Lemat Watsona). Rozdział ten kończy wprowadzenie pojęcia k-sumowalności w kierunku d szeregu formalnego. Mówiąc krótko musi wtedy istnieć funkcja holomorficzna w obszarze sektorowym $G_d(\alpha)$, gdzie $\alpha>\frac{\pi}{k}$, taka że rozważany szereg formalny jest rozwinięciem asymptotycznym Gevrey'a rzędu $\frac{1}{k}$ funkcji f.

Przejdę teraz do omówienia zasadniczych rozdziałów rozprawy.

Rozdział czwarty wprowadza dla operatora m-różniczkowego cząstkowego

$$\sum a_{\sigma,j,\alpha}(z)t^{\sigma}\partial_{m_o,t}^{j}\partial_{m,z}^{\alpha}$$

pojęcie diagramu Newtona. Jest to geometryczna metoda znalezienia wielkości, która później służy jako rząd Gevrey'a rozwiązania formalnego równania z opisanym operatorem. Zasadniczą częścią tego rozdziału jest analiza operatora postaci

$$\partial^M_{m_0,t} + \sum_{j,\alpha} a_{j,\alpha} \partial^j_{m_0,t} \partial^\alpha_{m,z}$$

gdzie indeksy w rozważanej sumie przebiegają zbiór skończony i współczynniki $a_{j,\alpha}$ są holomorficzne w pewnym otoczeniu zera. Po wyznaczeniu wielkości opisanej w diagramie Newtona rozważanego operatora praca analizuje zagadnienie Cauchy'ego postaci

$$\begin{aligned} \partial^M_{m_0,t} u(t,z) + \sum_{j,\alpha} a_{j,\alpha}(t) \partial^j_{m_0,t} \partial^\alpha_{m,z} u(t,z) &= f(t,z)\,, \\ \text{dla } j \in [0,M) \quad \partial^j_{m_0,t} u(0,z) &= \varphi_j(z)\,. \end{aligned}$$

Warto podkreślić, że rozważany problem jest liniowy. Zakłada się, że φ_j są holomorficzne w otoczeniu zera oraz f i współczynniki w równaniu są szeregami formalnymi zmiennej t rzędu Geverey'a $\frac{1}{k_1}$, gdzie liczba k_1 pochodzi z diagramu Newtona rozważanego operatora. Dodatkowo zakłada się, że $\mathrm{ord}_t(a_{j,\alpha}) \geq \max\{0, j+1-M\}$. Główny wynik tego rozdziału to Twierdzenie 4.1, które mówi, że rozwiązanie formalne rozważanego problemu jest rzędu Gevrey'a $\frac{1}{k_1}$ względem zmiennej t. To co trochę zastanawia czytelnika, zwłaszcza takiego, który nie pracuje na co dzień w tej tematyce, to brak definicji co to jest rozwiązanie formalne rozważanego zagadnienia. Jednakże już z dowodu przytoczonego twierdzenia wynika, że powstaje ono przez wstawienie szeregu formalnego do równania i poprzez procedurę porównania współczynników przy jednakowych potęgach t znalezienie współczynników poszukiwanego szeregu. Oczywiście uzyskany w ten sposób szereg jest tylko formalny. Ważnym do odnotowania jest fakt, że badanie rozważanego problemu można poprzez zastosowanie odpowiednich fransformat Borela sprowadzić do problemu, gdzie funkcje momentów m_i są zastąpione przez Γ_{s_i}, gdzie s_i to rząd m_i.

Rozdział piąty analizuje podobny problem do tego z rozdziału poprzedniego

$$\begin{aligned} \partial^M_{m_0,t} u(t,z) + \sum_{j,\alpha} a_{j,\alpha}(t,z) \partial^j_{m_0,t} \partial^\alpha_{m,z} u(t,z) &= f(t,z)\,, \\ \text{dla } j \in [0,M) \quad \partial^j_{m_0,t} u(0,z) &= \varphi_j(z)\,. \end{aligned}$$

Czyli współczynniki $a_{j,\alpha}$ zależą teraz od zmiennych t i z. Ponadto zakłada się, że wszystkie ciągi momentów $m_i(n)$ są regularne. Główny wynik tego rozdziału jest taki sam jak w rozdziale poprzednim, chciaż dowód jest teraz, moim zdaniem, znacznie trudniejszy.

Rozdział szósty zawiera w mojej opini najbardziej wartościowe rezultaty całej rozprawy. Rozważa się w nim dwa zagadnienia. Pierwsze to uogólniome równanie przewodnictwa ciepła

$$\begin{aligned} \partial^\kappa_{m_1,t} u(t,z) - a(z) \partial^p_{m_2,z} u(t,z) &= f(t,z)\,, \\ \text{dla } j \in [0,\kappa) \quad \partial^j_{m_0,t} u(0,z) &= \varphi_j(z)\,. \end{aligned}$$

Funkcje momentów m_1 i m_2 są rzędów s_1 i s_2 oraz zakłada się, że $s_2 p > s_1 \kappa$. Niech $k = \frac{s_2 p}{\kappa} - s_1$. Wtedy główny wynik tej części rozdziału mówi, że rozwiązanie formalne $\hat{u}$ rozważanego zagadnienia jest k-sumowalne w kierunku d wtedy i tylko wtedy gdy taką własność mają f oraz $\partial^q_{m_2,z}\hat{u}(t,0)$ dla $q \in [0, p-1]$. Zatem otrzymujemy warunki, przy których istnieje rozwiązanie analityczne rozważanego zagadnienia.
Drugi problem to analiza równania

$$\left(1 - \sum_i \sum_q a_{iq}(z)\partial^{-i}_{m_1,t}\partial^q_{m_2,z}\right) u(t,z) = f(t,z)$$

gdzie sumy są skończone, funkcje momentów m_i są regularne oraz ciąg momentów $m_2(n)$ jest logarytmicznie wypukły. Główny wynik to znalezienie warunków, przy których rozwiązanie formalne rozważanego równania jest k-sumowalne w pewnym kierunku d.

Na koniec analizy tekstu rozprawy chciałbym podkreślić, że wyniki rozdziału szóstego mają znacznie większe znaczenie niż wyniki rozdziałów 4 i 5. W rozdziale szóstym otrzymuje się warunki na istnienie analitycznych rozwiązań rozważanych problemów, a w rozdziałach 4 i 5 tylko istnienie rozwiązań formalnych w pewnych klasach Gevrey'a.

Podsumowując całą rozprawę należy podkreślić, że jest przejrzyście napisana i nawet dla nie specjalistów daje się dobrze analizować. Pomimo kilku uwag zawartych w mojej recenzji stwierdzam, że cała rozprawa doktorska jest napisana na dobrym poziomie o czym świadczy jakość czasopism naukowych, w których ukazały się prace naukowe stanowiące zasadniczą część rozprawy.

Podsumowując całą recenzję uważam, że przedstawiona rozprawa doktorska

Rozwiązania formalne i analityczne równań moment-różniczkowych cząstkowych

autorstwa pani magister *Marii Suwińskiej*

spełnia wszystkie ustawowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim z matematyki i wnioskuję o dopuszczenie pani magister *Marii Suwińskiej* do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

prof. dr hab. Krzysztof Chełmiński

KChełmiński