prof. dr hab. Agnieszka Kałamajska,
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2, 02–097 Warszawa
e-mail: A.Kalamajska@mimuw.edu.pl

Warszawa, 7 luty 2022

Ocena rozprawy doktorskiej
pt. "Rozwiązania formalne i analityczne równań moment-różniczkowych cząstkowych"
pani mgr. Marii Suwińskiej

1 Wstępne informacje

Praca pani Marii Suwińskiej została napisana pod kierunkiem pana dr. hab. Sławomira Michalika. Dotyczy ona problemu sumowalności rozwiązań formalnych dla moment-różniczkowych równań cząstkowych.

Tematyka pracy czerpie swoje motywacje z pracy W. Balsera i M. Laday-Richauda (2009) (pozycja [2] w bibliografii), która dotyczyła analizy sumowalności w klasach Gevreya dla rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych dla operatorów klasycznych. Autorka rozprawy podjęła wyzwanie w kierunku uogólnienia badań dotyczących sumowalności rozwiązań do równań moment-różniczkowych, ktore są uogólnieniem klasycznych równań cząstkowych. Ich definicja została wprowadzona przez W. Balsera i M. Yoshino w 2010 roku (pozycja [3] w bibliografii). Badania w tym kierunku są prowadzone także przez promotora rozprawy.

Ze względu na to, że jest to tematyka raczej nowa, trudno jest ustosunkować się jednoznacznie do motywacji dla operatorów moment-różniczkowych od strony praktycznych/inżynierskich zastosowań, natomiast niewątpliwie podjęte zagadnienia są interesujące od strony teoretycznej, jako ciekawe uogólnienia wyników dotyczących operatorów klasycznych.

Podjęta tematyka jest żmudna od strony realizacji technicznej. Zakres stosowanych narzędzi to aparat szeregów formalnych, teoria funkcji analitycznych, oraz sprawne stosowanie transformat typu Borela i Laplace'a. Trzeba umieć interpretować otrzymane wyniki, sprawnie dobierać i przeprowadzać odpowiednie oszacowania. Jest to trudne wyzwanie. Techniki muszą być sprytne, gdyż w wielu sytuacjach nie ma wzorca z innych prac, zatem wymaga to oryginalności przerowadzanych rachunków oraz sprytu rachunkowego. Sprawna technicznie i koncepcyjnie analiza, jest dużym wkładem doktorantki.

Efektem rozprawy jest spójne przedstawienie teorii sumowalności rozwiązań formalnych dla równań moment-rożniczkowych, bazujące na uogólnieniu wyników dla klasycznych lub moment-różniczkowch operatorów prostszego typu. Wyniki nowe zawarte w rozprawie bazują głównie na jednej pracy opublikowanej samodzielnie przez doktorantkę, oraz trzech pracach wspólych z promotorem, lub promotorem oraz matematykiem zagranicznym M. Lastra.

Wynik rozprawy uważam za wartościowy i ciekawy wkład w rozwój teorii sumowalności.

2 Omówienie rozprawy doktorskiej

2.1 Organizacja pracy oraz źródła

Rozprawa liczy około 100 stron i składa się ze Wprowadzenia, siedmiu rozdziałów głównych, jednego rozdziału uzupełniającego, oraz bibliografii liczącej 28 pozycji. Całość to konsekwentna i spójna analiza. Prezentacja wyników dokonuje się w kilku etapach, które z ogólnym zarysie przebiegają następująco:

(a) Omówione zostały potrzebne własności podstawowych obiektów używanych w pracy:

- funkcji analitycznych, szeregów formalnych, obszarow ich sumowania (Rozdział 1),
- funkcji jądrowych i funkcji momentów (Rozdział 2),
- własności szeregów formalnych w tym rzędu Gevreya, rozwinięć asymptotycznych dla funkcji holomorficznych, metod sumowalności szeregów (Rozdział 3);

(b) Przedstawione zostały nowe wyniki dotyczące:
- rzędu Gevreya rozwinięć formalnych dla równań liniowych moment różniczkowych, bazujące na pracach [7] i [22] wymienionych poniżej (Rozdział 4 i 5),
- sumowalności w klasach Gevreya rozwiązań równań o współczynnikach zależnych jedynie od zmiennej zespolonej, w oparciu o prace [7] i [8] wymienione poniżej (Rozdział 6);

(c) Przedstawione zostały otwarte problemy i zaproponowane kierunki dalszych badań (Rozdział 7).

Wyniki włączone do dorobku rozprawy bazują na:

- jednej pracy samodzielnej

  [22] Suwińska, M., *Gevrey estimates of formal solutions for certain moment partial differential equations with variable coefficients,* J. Dyn. Control Syst. 27 (2021), no. 2, 355–370.

- jednej pracy wspólnej wraz z promotorem

  [13] Michalik, S., Suwińska, M., *Gevrey estimates for certain moment partial differential equations,* 391-408, De Gruyter Proc. Math., 2020, https://arxiv.org/abs/1812.10698

- dwóch pracach trój- autorskich, wraz ze współautorem zagranicznym M. Lastra:

  [7] Lastra M., Michalik, S., Suwińska, M., *Summability of formal solutions for some generalized moment partial differential equations,* Results Math. 76 (2021), no. 1,

  [8] Lastra M., Michalik, S., Suwińska, M., *Summability of formal solutions for a family of generalized moment integro-differential equations,* https://arxiv.org/abs/2012.12323 .

Duży wkład Autorki rozprawy jest włożony w spójne i wyczepujące przedstawienie wyników, wnikliwą i bardzo staranną analizę warunków koniecznych i dostatecznych w twierdzeniach, zamieszczonych przykładach i kontrprzykładach, starannym opisie metod dowodu. Ciekawy jest także zamykający rozdział dotyczący możliwych perspektyw rozwoju teorii.

Organizację pracy uważam za dobrze przemyślaną. Wybór źródeł jest prawidłowy. Sama praca jest napisana starannie.

2.2 Główne wyniki, narzędzia pracy

Rozprawa w sposób spójny i konsekwentny odnosi się do problemu sumowalności w klasach Gevreya rozwiązań formalnych równań cząstkowych z operatorami moment-rożniczkowymi. Jest to rodzaj teorii regularności dla rozwiązań równań w klasach szeregów formalnych.

Analiza oszacowań dla formalnych rozwiązań równań w klasach Gevreya narodziła się stosunkowo niedawno, w pracy W. Balsera oraz M. Laday-Richauda w 2009 roku [2]. Badania były następnie rozwijane i uogólniane w pracy W. Balsera i M. Yoshino z 2010 roku [3], gdzie po raz pierwszy pojawiła się definicja operatora moment-różniczkowego. Operatory te rozszerzają definiecję klasycznego różniczkowania, lecz także na przykłąd pochodnej ułamkowej typu Caputo, zatem pomysł analizy operatorów moment-różniczkowych jest dobrze umotywowany. Obie wymienione prace można uznać za punkt wyjściowy i motywację badań z Rozprawy. Z dalszych badań, prowadzonych między innymi przez P. Remy, H. Tahara, H. Tahara i H. Yamazawa, M. Miyake i M. Yoshino wynika, że postawienie problemu sumowalności rozwiązań formalnych równań cząstkowych w klasach Gevreya jeat bardzo naturalne. Takie klasy w teorii szeregów formalnych zdają się zastępować przestrzenie Sobolewa w klasycznej teorii regularności.

Rozdział 1 omawia podstawowe potrzebne pojęcia: funkcje analityczne, szeregi formalne, sektory i obszary sektorialne, potrzebne do badań nad sumowalnością szeregów, ze szczególnym uwzględnieniem szeregów o wykładniczym tempie wzrostu.

W rozdziale 2 wprowadzone i analiozwane są już bardziej specjalistyczne obiekty: pary funkcji jądrowych (e, E) i uzależniające je funkcje momentów $m(u)$. Analizowane są własności tych funkcji na przykład ze względu na skalowanie, pokazane są przykładowe ich konstrukcje, analizowane są algebraiczne własności momentów konkretnych rzędów. Analiza tempa wzrostu prowadzi do wyróżnienia klasy s-regularnych funkcji momentów. Następnie badane jest zachowanie takich klas ze względu na mnożenie i dzielenie momentów. Pary funkcji jądrowych, oraz wiążące je momenty pozwalają uogólnić klasyczne transformaty Laplace'a i Borela do operatorów typu całkowego, określonych dla funkcji holomorficznych na obszarze sektorialnym.

Kolejnym pojęciem jest m-transformata Laplace'a oraz Borela, definiowana na szeregach formalnych, oraz najważniejsze pojęcie- operator (odwracalny) m- różniczkowania, zadany na szeregach:

$$\partial_{m,z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{m(n)}z^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_{n+1}}{m(n)}z^n,$$

powiązany z ciągiem momentów $\{m(n)\}$. Operator taki uogólnia klasyczny operator rożniczkowania $\frac{\partial}{\partial z}$ zadany na szeregach formalnych. Dla funkcji o wykładniczym tempie wzrostu przedstawione są oszacowania dla takich operatorów, oraz ich złożeń. Ponadto wykazany jest odpowiednik twierdzenia Schartza o przemienności moment-różniczkowania. Na co warto zwrócić uwagę, regularne funkcje momentów pochodzą z pracy [13], Autorki rozprawy i promotora. Metody dowodów opierają się na oszacowaniach dla transformat całkowych funkcji holomorficznych i sprytnych podstawieniach. Dowody większości własności pochodzą ze źródeł już klasycznych [2] i [3], lecz analiza w obrębie klas regularnych momentów jest między innymi wkładem doktorantki.

Przedstawiona analiza jest przejrzysta, konsekwentna i interesująca a dowody są pełne.

W rozdziale 3 omówione zostało kolejne kluczone pojęcie - rzędu Gevreya - s - szeregu formalnego. Następnie wprowadzone jest pojęcie rozwinięcia asymptotycznego funkcji, pozwalającego przybliżać funkcję przez pewien jednoznacznie wyrażony szereg, podobnie jak przybliża się funkcję gładką w zerze przez jej szereg Talora, wykorzystując reszty w postaci Peano. Pokazane jest, że przypisanie funkcji holomorficznej w sektorze jej rozwinięcia asymptotycznego jest homomorfizmem algebr. Jeśli odpowiednik "N-tej reszty Taylora" podzielony przez z^{-N}:

$$r_f(z,N) := \frac{f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n}{z^N}$$

spełnia oszacowanie

$$\|r_f(z,N)\|_E \leq CK^N \Gamma(1+sN), \text{dla wszytskich } N \in \mathbf{N},$$

to mowimy, że szereg $\hat{f} = \sum_{n\in\mathbf{N}} f_n z^n$ jest rozwinięciem asymptotycznym Gevreya dla f rzędu s. Szeregi formalne k- sumowalne to takie, które mają rozwinięcia asymtotyczne rzędu $1/k$ w odpowiednim sektorze. Sumy takich szeregów można wyznaczyć jednoznacznie przy pomocy wcześniej wprowadzonych transformat typu Borela i Laplace'a, co wynika z Twierdzenia 3.2. Zrozumienie warunków zbieżności jest tutaj kluczowe, gdyż operator m-różniczkowania był dotąd zadany tylko na szeregach formalnych. Skoro umiemy sumować takie szeregi, dostajemy wariant m-tej pochodnej funkcji ze względu na moment m, jako sumę szeregu $\partial_{m,z}\hat{f}$, gdzie $\hat{f}$ jest rozwinięciem asymptotycznym f w szereg. Ponadto pokazane jest, że przestrzeń szeregów formalnych k-sumowalnych jest zamknięta ze względu na działanie operatora m-różniczkowania i odwrotnego, oraz wykazane zostały oszacowania dla moment-pochodnych i ich potęg.
W Stwierdzeniu 3.5 zauważyłam potrzebę korekty: zamiast $\partial_{m,z}U = u$ powinno być $\partial_{m,z}F = f$.

Wprowadzenie do klas Gevreya i działania operatorów moment różniczkowch w tych klasach zostało starannie przedstawione, zilustorowane i przeanalizowane.

Rozdział 4 poświęcony jest rozwiązaniom równań liniowych moment-różniczkowych, których współczyniki zależą wyłącznie od zmiennej czasowej. Zastosowana została metoda z pracy H. Tahara i H. Yamazawa z 2013 roku, lecz w przeciwieństwie do wymienionej, metoda jest zastosowana do równań moment-różniczkowych i pochodzi z pracy [13], włączonej do doktoratu.

Na początku wprowadzone jest pojęcie diagramu Newtona, który jest uwypukleniem pewnego podzbioru w $\mathbf{R}^2$, zależnego od współczynników operatora moment-różniczkowsgo.

Bazując na pracy [13], zdefiniowane jest pojęcie normy holomorficznej funkcji f. Tu mam uwagę, skoro wzór (4.5) ma wyrażać normę, a liczba ρ należy do $\mathbf{C}^N$, po prawej pominniśmy widzieć $|\rho^\alpha|$, inaczej prawa strona w wyrażeniu nie musi być liczbą rzeczywistą dodatnią, więc nie wyraża normy. Po poprawce argumenty zdają się być prawidłowe. Po serii lematów szacujących normy formalne funkcji holomorficznych, w rozdziale 4.3 rozważane są operatory moment-różniczkowe o współczynnikach zależnych jedynie od zmiennej czasowej i zagadnienie Cauchy'ego dla takich równań. Takie równanie może być sprowadzone do pewnego uproszczonego zagadnienia z bardzo sprytnym wykorzystaniem transformat Borela. Jest wykazane, że rząd Gevreya rozwiązania dla równania uproszczonego i wyjściowego względem czasu jest ten sam, co pozwala zredukować rachunki dotyczące regularności rozwiązania. Po serii żmudnych technicznie rachunków rozdział kończy się solidnym twierdzeniem o rzędzie Gevreya rozwiazania wyjściowego problemu Cauchy'ego względem zmiennej czasowej.

Rozdział 5 dotyczy analizy własności rozwiązań równań moment różniczkowych, gdzie współczynniki operatorów mogą zależeć nie tylko od zmiennej czasowej, lecz także od zmiennej zespolonej. Własności dotyczą regularności rozwiązań w klasach Gevreya, względem zmiennej czasowej. Wynik inspirowany jest przez wcześniejszą pracę główną [2], oraz pracami P. Remy z 2016 i 2017 roku. Opiera się on na pracy [22]. Zaczynając od wprowadzenia pomocniczo wykorzystanych potem norm Nagumo dla funkcji holomorficznej, jej modyfikacji, przechodząc przez analizę własności tych norm, w tym serię lematów wiążących normę Nagumo z rzędem Gevreya rozwinięcia funkcji, rozdział zokończony jest mocnym rezultatem: Twierdzeniem 5.1 o regularności rozwiązań dla takich zagadnień Cauchy'ego względem czasu, gdzie regularność jest określona przez rząd Gevreya szeregu formalnego. Nie jest to automatyczne przeniesienie wyników z poprzedniego rozdziału, gdyż założenie dotyczace współczynnikow operatora jest obecnie dużo ogólniejsze - rozwinięcia współczynników muszą należeć do określonej klasy Gevreya względem czasu. Dowód wymaga bardzo żmudnych oszacowań dla szeregów. Ciekawy jest komentarz kończący rozdział, dotyczący konieczności przyjętego założenia o regularności współczynników.

Wynik uważam na ważny i ciekawy, a także uzupełnia on wyniki z poprzedniego rozdziału. Mam drobną uwagę krytyczną, lematy powinny być poprzedzone bardziej przejrzystą intuicyjnie interpretacją.

Rozdział 6 kończy od strony merytorycznej rozważania rozprawy. Analiza opiera się na pracach [7] i [8] i uogólnia wyniki dla operatorów klasycznych z pracy pionierskiej [2], oraz pracę P. Remy'ego z 2017 roku. Na początek rozważane jest proste równanie typu parabolicznego dla przypadku zmiennej $z \in \mathbf{C}$, gdzie współczynniki mogą zależeć jedynie od zmiennej z. Przy dodatkowym założeniu o logarytmicznej wypukłości ciągu momentów powiązanych z różniczkowaniem w kierunku z, została wykazana charakteryzacja k-sumowalności rozwiązania formalnego zagadnienia. Stąd wnioskuje się także o analityczności rozwiązania. Kolejnym krokiem jest równanie bardziej ogólne, nadal z operatorem którego współczynniki mogą zależeć jednynie od zmiennej $z \in \mathbf{C}$, którego operatory składowe zawierają operatory mieszane moment różniczkowe postaci $\partial_{m_1,t}^{-i}\partial_{m_2,z}^{q}$ gdzie $q, i \in \mathbf{N}$. Wykazana jest jednoznaczność rozwiązań formalnych dla takiego zagadnienia, oraz Twierdzenie 6.2 - podające warunek na k-sumowalność rozwiązania. Gównym wynikiem rozdziału jest Twierdzenie 6.3 orzekające, że warunek konieczny w Twierdzeniu

6.2 jest zarazem warunkiem dostatecznym. Jest to interesujące twierdzenie, wymagające długiego, trudnego technicznie dowodu.

Jedyną uwagę krytyczną, którą mogłabym tu zmieścić jest brak informacji dotyczącej motywacji do rozważania tego typu równań.

Rozdział 7 ma charakter zamykający i uzupełniający. Ciekawe są zamieszczone tam wyniki dotyczące reguły Leibnitza dla operatorów moment-różniczkowych, w tym Stwierdzenie 7.1 będące charakteryzacją. Przedstawionych jest kilka otwartych problemów, w sposób przekonujący wskazujących kierunki dalszych badań.

Rozdział 8 zawiera informacje uzupełniające, co ułatwia czytanie pracy.

Podsumowując, stosowane narzędzia pracy wymagają wiedzy z zakresu funkcji analitycznych, znajmomości transformat, ogromnego sprytu rachunkowego, oraz cierpliwości i pracowitości. Przedstawiona analiza jest obszerna i głęboka, wiele wyników to dowody pełne, zakończone warunkiem koniecznym i dostatecznym.

2.3 Dodatkowe informacje

W bazie Mathematical Reviews widoczne są także dwie inne prace poza doktoratem:

- A. Lastra, S. Michalik, M. Suwińska, *Estimates of formal solutions for some generalized moment partial differential equations,* J. Math. Anal. Appl. 500 (2021), no. 1, Paper No. 125094, 18 pp.,
- S. Michalik, M. Suwińska, *Hyperasymptotic solutions for certain partial differential equations,* Formal and analytic solutions of diff. equations, 61–78, Springer Proc. Math. Stat., 256, Springer, Cham, 2018.

co wskazuje na aktywność i regularną pracę doktorantki.

3 Konkluzja

Biorąc pod uwagę dokonane osiągnięcie, po przedstawieniu zarówno pozytywnych jak i negatywnych aspektów oceny, z pełnym przekonaniem stwierdzam, że przedstawiona rozprawa doktorska w pełni spełnia wymagania zwyczajowe i ustawowe stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie pani mgr. Marii Suwińskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Z wyrazami szacunku,

A. Kałamajska

Agnieszka Kałamajska