Kraków, 22 XI 2022

Łukasz Kosiński
Instytut Matematyki
Wydział Matematyki i Informatyki UJ
lukasz.kosinski@uj.edu.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej pani mgr Bożeny Tkacz pt. *Charakteryzacja zjawiska Stokesa dla rozwiązań formalnych wybranych równań różniczkowych i moment różniczkowych cząstkowych*

1. Tematyka rozprawy doktorskiej

Tematyka rozprawy doktorskiej pani Bożeny Tkacz dotyczy zjawiska Stokesa dla rozwiązań jednorodnych liniowych równań różniczkowych czątkowych w sytuacji, gdy początkowe dane Cauchy'ego są funkcjami holomorficznymi na płaszczyźnie zespolonej z wyrzuconą skończoną liczbą punktów (w których to funkcje w zagadnieniu Cauchy'ego będą mieć jakieś osobliwości bądź rozgałęzienia).

Jak wiadomo, w teorii PDE podanie dokładnego rozwiązania danego równania różniczkowego nie jest zazwyczaj możliwe. Można za to badać asymptotykę rozwiązań (a dokładniej badać asymptotyczne rozwinięcia rozwiązań). Niemniej okazuje się, że można otrzymywać różne rozwinięcia w różnych sektorach. Zjawisko to nazywa się *zjawiskiem Stokesa* a jego istnienie prowadzi do naturalnych pojęć, takich jakich linie czy linie anty-Stokesa (i odpowiednie skoki). Stanowi to kanwę rozprawy doktorskiej pani Tkacz.

Problem jest dobrze zilustrowany w rozprawie na przykładzie równania przewodnictwa cieplnego:

$$(\dagger) \qquad \begin{cases} \partial_t u = \partial_z^2 u, \\ u(0,z) = \varphi(z), \end{cases}$$

gdzie φ jest funkcją holomorficzną (zadaną np. w otoczeniu $0 \in \mathbb{C}$). Zagadnienie to ma jednoznaczne rozwiązanie formalne (tzn. będące szeregiem formalnym) postaci

$$\hat{u}(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2n)}(z) t^n}{n!}.$$

Niestety rozwiązanie to zwykle jest rozbieżne. Okazuje się jednak, że przy odpowiednich założeniach można zastosować to $\hat{u}$ procedurę sumowalności, która pozwala uzbieżnić $\hat{u}$, oraz opisać jego 1-sumę.

Problemy, wokół których skupia się praca doktorska, mieszczą się w miarę aktywnym nurcie badań. Do osób zajmujących się tą tematyką należą (poza promotorem) m.in. P. Remy, A. Lastra, S. Malek, J. Sanz, G. Łysik, M. Suwińska, D. Lutz, M. Miyake i R. Schäfke.

Rozprawa doktorska oparta jest na czterech artykułach naukowych. Dwa z nich, opublikowane wspólnie z promotorem, ukazały się w dobrych czasopismach: *Asymptotic Analysis* oraz *Journal of Dynamical and Control Systems.* Te samodzielne opublikowane zostały w czasopismach pokonferencyjnych (należy tu zaznaczyć, że w obu z nich edytorem był promotor pani Tkacz).

2. Główne wyniki rozprawy

Pracę rozpoczyna rozdział zawierający pojęcia wprowadzające, pochodzące z analizy zespolonej jednej zmiennej (funkcje wieloznaczne, twierdzenie o residuach, punkty rozgałęzienia i współrzędne Puiseux). Następnie autorka przypomina najważniejsze fakty dotyczące szeregów formalnych, funkcji jądrowych (uogólnień funkcji Mittag-Lefflera), funkcji momentów (uogólniających klasyczną teorię k-sumowalności). Pojawia się także teoria asymptotyki w sensie Gevreya oraz teoria Balsera. Mając w rękach te narzędzia, autorka szczegółowo przybliża istotną tu procedurę $k-$sumowalności. Polega ona na zamianie szeregu formalnego na odpowiednią funkcję holomorficzną. Używać jej można gdy zachodzą dwa warunki, spełnione dla dość dużej klasy szeregów formalnych.

Wreszcie, w Rozdziale 3, pojawia się kluczowe dla pracy zjawisko Stokesa oraz związane z nim linie Stokesa (i anty-Stokesa). Wprowadzone zostaje także pojęcie skoku przez te linie.

Główną część otwiera Rozdział 4, a dokładniej opisanie zjawiska Stokesa dla równania (†) przy założeniu, że φ jest postaci $\varphi(z) = \frac{1}{z-z_0} + \tilde{\varphi}(z)$, gdzie $z_0 \neq 0$ oraz $\tilde{\varphi}$ jest holomorficzną funkcją całkowitą spełniającą warunek wzrostu $|\tilde{\varphi}(z)| \leqslant C_1 e^{C_2|z|^2}$ dla pewnych stałych C_1, C_2 (wynik ten posiada uogólnienie, uzyskiwane dzięki standardowemu argumentowi liniowości). Dowód opiera się na użyciu wyników z prac Lutza, Miyake. Shäfke i Michalika dotyczącego 1-sumowalności odpowiedniego szeregu formalnego, a główna metoda polega na, bardzo technicznym, liczeniu odpowiednich całek zespolonych przy użyciu twierdzenia o residuach.

Następnie autorka rozważa uogólnione równanie przewodnictwa cieplnego, dowodząc wyniku uzyskanego w zasadzie przez Ichnobe, jednakże przy użyciu alternatywnej metody. Podobnie jak wcześniej, dowód jest bardzo techniczny i wymaga dużej biegłości obliczeniowej.

Kolejny rozdział dotyczy wykorzystania teorii hiperfunkcji do opisania skoków przez wspomniane wyżej linie Stokesa. Jeśli Ω jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}$, oraz V jest jednospójny i otwarty w $\mathbb{C}$, $\Omega \subset V$, to przez hiperfunkcję na Ω rozumiemy klasę równoważności funkcji w $\mathcal{O}(V \setminus \Omega)$ modulo $\mathcal{O}(V)$ (zgodnie z twierdzeniem Köthego istnieje naturalny izomorfizm pomiędzy przestrzenią hiperfunkcji o nośniku zawarty w K a przestrzenią funkcjonałów analitycznych na K). Rozdział rozpoczyna przypomnienie podstawowych własności wspomnianych hiperfunkcji oraz klasycznej teorii dystrybucji.

Wyniki zaprezentowane w tym rozdziale zostały opublikowane w samodzielnych publikacjach autorki oraz w pracy wspólnej z promotorem z *J. Dyn. Cont. Systems.* Autorka rozważa równanie (†) i wyznacza linie Stokesa przy ogólniejszym założeniu, że φ ma w z_0 punk osobliwy bądź punkt rozgałęzienia. Także i ta część jest bardzo techniczna. Warto podkreślić, że zaprezentowanie dużej liczby przykładów czyni ją odpowiednio przejrzystą i zrozumiałą.

Dalsza część rozdziału 5 dotyczy równań dwóch zmiennych zespolonych. Nowym narzędziem używanym tu są operatory m-moment różniczkowe, wprowadzone przez Balsera i Yoshino, uogólniające zwyczajne i ułamkowe różniczkowanie. Część ta stanowi bezpośrednią kontynuację badań prowadzonych przez promotora. Rozdział zamyka sekcja poświęcona równaniom różniczkowym ze zmiennymi współczynnikami. Ponownie, łatwo wskazać tu rozwiązanie formalne, do którego można stosować aparat m-moment transformacji. Autorka także i tu skupia się na wyznaczaniu linii Stokesa oraz ich skoków.

Część stosowanych metod polega na modyfikacji tych użytych przez innych autorów zajmujących się tymi zagadnieniami (zwłaszcza przez promotora), jednak użycie ich wymaga dużego zrozumienia i biegłości technicznej.

Ostatni rozdział oparty jest na książce Mitschi i Sauzina *Divergent Series, Summability and Resugence* i opisuje zjawisko Stokesa przy użyciu tzw. funkcji resurgentnych. Nie jest dla mnie jasne, jak dużą część tego rozdziału stanowi wkład własny autorki, niemniej jednak tworzy on naturalne dopełnienie całej rozprawy.

Pracę doktorską kończy spis otwartych problemów, które pojawiły się podczas prowadzonych przez autorkę badań.

3. Ocena rozprawy

Przedstawiona praca doktorska jest bardzo obszerna, liczy ponad 100 stron. Mimo to wydaje się, że jej konstrukcja jest przemyślana, a całość dopełniona odpowiednimi przykładami.

Prezentowana tematyka, mimo że bardzo techniczna, jest dość trudna i wymaga od autorki obszernej wiedzy. Bez wątpienia zakres opanowanego materiału i jego stopień zaawansowania skłaniają do uznania pracy za spełniającą wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Przypomnieć należy, że duża część materiału pochodzi z czterech prac autorki, z których dwie, współautorskie, są opublikowane w przyzwoitych czasopismach matematycznych. Jest to kolejną przesłanką za uznaniem rozprawy wystarczającej do nadania stopnia doktora.

Dużych zarzutów nie mam do strony redakcyjnej rozprawy — jest ona dobra, choć w moim odczuciu miejscami mogłaby być lepsza.

4. Konkluzja

Uważam, że przedstawiona do oceny rozprawa doktorska pani Bożeny Tkacz spełnia formalne i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o dopuszczenie pani Bożeny Tkacz do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

ŁUKASZ KOSIŃSKI