dr hab. Tomasz Adamowicz, prof. IMPAN
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa
email: T.Adamowicz@impan.pl

Warszawa, 13 stycznia 2021r.

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MGRA HUBERTA GRZEBUŁY
"Funkcje poliharmoniczne na euklidesowych kulach obróconych"

Rozprawa doktorska Pana Grzebuły została napisana pod opieką Pana dra hab. Sławomira Michalika (UKSW). Tematyka rozprawy wyrasta z klasycznej analizy zespolonej i uogólnień operatora laplasjanu (funkcje poliharmoniczne). Kluczem do uzyskania wyników jest wybór odpowiedniego typu obszarów w $\mathbb{C}^n$, to jest obróconych kul euklidesowych. Takie obszary umożliwiają udowodnienie wielu analogów wyników dla funkcji harmonicznych, jąder reprodukujących, przestrzeni Bergmana w przypadku poliharmonicznym.

Materiał rozprawy został oparty na opublikowanych artykułach:

(1) H. Grzebuła, S. Michalik *A Dirichlet type problem for complex polyharmonic functions*, Acta Math. Hungar. 153 (2017), no. 1, 216–229.

(2) H. Grzebuła, S. Michalik *Spherical polyharmonics and Poisson kernels for polyharmonic functions*, Complex Var. Elliptic Equ. 64 (2019), no. 3, 420–442.

(3) H. Grzebuła *The polyharmonic Bergman space for the union of rotated unit balls*, Complex Anal. Oper. Theory 14 (2020), no. 1, Paper No. 15, 20 pp.

Powyższe prace ukazały się w czasopismach o zasięgu światowym, uznanych przez specjalistów z analizy zespolonej. Dwie prace powstały we współpracy z promotorem i jak wynika z przesłanych oświadczeń współautorskich, Pan Grzebuła miał równy - w przypadku pracy (2) - lub przeważający - dla pracy (1), wkład w powstanie powyższych artykułów. We współczesnym świecie nauki jest to normalna proporcja, świadcząca dodatkowo o harmonijnej współpracy między doktorantem i promotorem.

Opis pracy

Rozprawa została napisana w języku polskim i ma 93 strony wliczając 4 strony opisu oznaczeń oraz indeks. Bibliografia rozprawy liczy 29 pozycji. Praca podzielona jest na pięć rozdziałów plus uwagi końcowe, każdy składający się z podrozdziałów adekwatnych do podziału materiału.

Podstawowym osiągnięciem rozprawy jest podkreślenie roli i uwypuklenie znaczenia obszarów obróconych kul w kontekście funkcji poliharmonicznych. Pan Grzebuła wynikami rozprawy wskazuje, że ten typ obszarów dobrze koresponuje z naturą funkcji poliharmonicznych w ujęciu zespolonym. Obserwacja ta jest również pośrednio wyrażona w uwagach końcowych rozprawy (str. 84-85), gdzie Autor wskazuje na dalsze zagadnienia badawcze wyrastające z wyników rozprawy, np.: istnienie rozwiązań poliharmonicznego zagadnienia Dirichleta przy dowolnych ciągłych danych na $\hat{S}_p$, zasady maksimum oraz dalsze wyniki dla jądra Bergmana. Spodziewam się, że doktorat Pana Grzebuły zostanie zauważony przez specjalistów, a główny jego wątek podjęty przez badaczy zajmujących się funkcjami poliharmonicznymi.

Przejdę teraz do bardziej szczegółowego opisu wyników rozprawy.

Wstęp i wprowadzenie zawierają streszczenie uzyskanych wyników oraz podstawowe definicje i własności funkcji wykorzystywane w rozprawie wraz z dowodami kluczowych obserwacji (rozwinięcie Almansiego, lemat 1.1 o analitycznym przedłużaniu). Zabrakło za to opisu szerszego obrazu funkcji poliharmonicznych, ich znaczenia w teorii równań różniczkowych cząstkowych, w teorii funkcji i przekształceń, czy też krótkiego rysu historycznego oraz motywacji badań tej klasy funkcji.

Rozdział drugi oparty jest o publikację (1) i zawiera kluczowe dla rozprawy wyniki dotyczące rozwiązania p-poliharmonicznego zagadnienia Dirichleta na obróconych kulach ((2.1) na str. 23-24). Postać rozwiązania udowodniono w twierdzeniu 2.1, którego sednem dowodu jest redukcja zagadnienia do pomocniczych zagadnień Dirichleta dla funkcji harmonicznych. Jest to możliwe dzięki lematowi 2.1 oraz rozwinięciu Almansiego. Wynik zilustrowany jest przykładami 2.2 i 2.3 (dla $p = 2$) a przedstawione obliczenia w nietrywialny sposób wykorzystują podstawowe techniki analizy zespolonej. Wnioski z głównego twierdzenia rozdziału obejmują: reprezentacje rozwiązań na przesuniętych kulach (wniosek 2.1) oraz własność wartości średniej dla funkcji poliharmonicznej (wniosek 2.2). Ponadto, twierdzenie 2.1 wraz z transformatą Kelvina funkcji poliharmonicznej (lemat 2.2) pozwala udowodnić jednoznaczność oraz wzór dla zewnętrznego zagadnienia Dirichleta, patrz (2.20) oraz wniosek 2.3 na str. 34-35. Do prezentacji w rozdziale drugim wkradły się drobne błędy typograficzne: w przykładzie 2.1 równanie różniczkowe jest stopnia 4 a nie 2 jak napisano, w przykładzie 2.3 na stronie 30 powinno być $x^2 + y^2$ zamiast $x_2 + y_2$, a na stronie 31 w liczniku drugiego wyrażenia dla residuum g pominięto $1 + i$ w końcowym obliczeniu (wzór I_2 pozostaje prawdziwy pokazując, że pominięty poprzednio wyraz jest błędem typograficznym). Błędy te nie wpływają na prawdziwość wyników.

W **rozdziale trzecim** opartym na pracy (2) uogólniono wyniki dla jednorodnych wielomianów harmonicznych na przypadek p-poliharmoniczny. Pierwszym krokiem w tym kierunku jest stwierdzenie 3.1, w którym udowodniono reprezentacje typu Almansiego dla poliharmonicznych wielomianów jednorodnych $\mathscr{H}_m^p(\mathbb{C}^n)$ stopnia m. Następnie, wykorzystując ten wynik, pokazano własności wielomianów $\mathscr{H}_m^p(\mathbb{C}^n)$ analogiczne do znanych własności dla $p = 1$ (stwierdzenia 3.2-3.4). W rozdziale 3.2 zdefiniowano poliharmoniki sferyczne stopnia m rzędu p (definicja 3.1), które wykorzystano do pokazania twierdzenia 3.1 o rozkładzie ortogonalnym $L^2(\hat{S}_p)$. Dowód tego wyniku polega na pokazaniu warunków i)-iii) w definicji 3.2, co z kolei redukuje się do uwagi 3.3 oraz stwierdzeń 3.5 i 3.6. Podrozdział 3.3 zawiera definicję i dyskusję poliharmonik strefowych (definicja 3.3), będących uogólnieniem harmonik strefowych. Podobnie jak poprzednim podrozdziale, tak i w tym przyjęto dobrą stategię prezentacji wyników poprzez sformułowanie wpierw znanych wyników dla przypadku harmonicznego $p = 1$ (lemat 3.5) a następnie dyskusję uogólnień dla $p \neq 1$ (stwierdzenia 3.7 i 3.8). Twierdzenie 3.2 ilustruje ważną własność poliharmonik strefowych: są kombinacjami $p - 1$ harmonik strefowych o współczynnikach zależnych od iloczynów modułów zmiennych w odpowiednich potęgach. Jest to kolejny techniczny i użyteczny wynik rozprawy pokazujący redukcję zagadanienia poliharmonicznego do odpowiedniego zagadanienia harmonicznego. W mojej ocenie rozdział 3.3 zyskałby jeszcze na pogłębionym opisie motywacji dla badania poliharmonik strefowych (są wykorzystywane na przykład w kolejnych rozdziałach rozprawy). Ciekawe wyniki rozprawy zaprezentowano w podrozdziale 3.4: stwierdzenia 3.9-3.10 oraz twierdzenie 3.4 podają postać poliharmonicznego jądra Poissona a stwierdzenie 3.11 pokazuje jego własności. Dzięki temu możliwe jest wyrażenia poliharmonicznego zagadnienia Dirichleta w języku jądra Poissona (twierdzenie 3.5), jak również wynik z teorii potencjału (stwierdzenie 3.12) orzekający, że ciąg funkcji poliharmonicznych zbiega lokalnie jednostajnie do funkcji poliharmonicznej (na $\hat{B}_p$). Rozdział trzeci kończy dyskusja jawnych wzorów na poliharmoniki strefowe. W tym celu Pan Grzebuła wykorzystuje wielomiany Gegenbauera (stwierdzenie 3.14 i twierdzenie 3.6) oraz wielomiany Legendre'a (definicja 3.7). Tym samym łączy badania nad poliharmonikami z ważną klasą równań różniczkowych zwyczajnych. Rozdział trzeci zawiera dużo ciekawych oraz istotnych wyników a dowody twierdzeń (szczególnie w podrozdziale 3.2) są złożone i wykorzystują narzędzia również spoza analizy zespolonej.

Celem **rozdziału czwartego** opartego na pracy (3) jest zdefiniowanie i zbadanie podstawowych własności przestrzeni poliharmonicznych Bergmana na $\hat{B}_p$ dla miary Lebesgue oraz miary ważonej z wagą zależną od odległości od brzegu kuli B. Centralne wyniki rozdziału dotyczą istnienia i reprezentacji jądra poliharmonicznego dla funkcji z przestrzeni Bergmana (twierdzenia 4.1-4.3) oraz jego podstawowych własności (stwierdzenie 4.3). Dowody wyników wykorzystują między innymi poliharmoniki strefowe oraz gęstość wielomianów poliharmonicznych w badanej przestrzeni Bergmana (stwierdzenie 4.6). Zwraca uwagę twierdzenie 4.3 oraz wzór (4.7) na str. 70 przedstawiający poliharmoniczne jądro Poissona jako wyrażenie zależne od harmonicznego jądra Bergmana oraz harmonicznego jądra Poissona. Jest to dobry punkt wyjścia do dalszych badań nad związkami p-przestrzeni Bergmana z klasycznymi przestrzeniami Bergmana dla $p = 1$. Analogi wyników z podrozdziału 4.2 dla ważonych przestrzeni pokazano w stwierdzeniach 4.7-4.11. Wzory explicite ważonych jąder Bergmana wyprowadzone są twierdzeniach 4.4-4.6 i wykorzystują funkcje gamma oraz wielomiany poliharmoniczne. Nie przedstawiono ani nie skomentowano możliwych zastosowań tych wzorów do badania własności ważonych przestrzeni Bergmana.

Rozdział piąty rozprawy, powstały w oparciu o pracę (2), zawiera dyskusję związków między funkcjami poliharmonicznymi a funkcjami holomorficznymi na kuli Liego. Znaczenie tego zbioru wynika z faktu, że kula Liego jest (poli)harmoniczną otoczką kuli euklidesowej. Kluczowe wyniki tego rozdziału to stwierdzenie 5.2 o niemal jednostajnej zbieżności p-poliharmonicznego jądra Poissona do jądra Cauchy-Hua na zbiorze LD (patrz uwaga 5.3, str. 80) oraz twierdzenie 5.1 o aproksymacji funkcji holomorficznych na kuli Liego (ciągłych na jej domknięciu) przez funkcje p-poliharmoniczne na $\hat{B}_p$ przy $p \to \infty$. Wynika stąd ciekawa własność wartości średniej dla funkcji analitycznych względem sfery Liego (wniosek 5.1).

Uwagi redakcyjne i językowe

Praca jest dobrze zredagowana. Drobne błędy typograficzne wspomniane powyżej nie mają wpływu na prawdziwość wyników.

Podsumowanie

Całość rozprawy oceniam pozytywnie. Wyniki w niej zaprezentowane wymagają dobrego zrozumienia postawionych problemów badawczych oraz stosownych umiejętności technicznych w zakresie analizy zespolonej. **Uważam, że rozprawa Pana mgra Huberta Grzebuły spełnia ustawowe, a także zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie jej Autora do dalszych etapów postępowania doktorskiego.**

Tomasz Adamowicz
Tomasz Adamowicz