dr hab. Andrzej Kucharski
Instytut Matematyki
Uniwersytet Śląski w Katowicach

Katowice, 28.03.2022

Recenzja rozprawy doktorskiej Pani mgr Marii Piekarskiej
Metody kombinatoryczne w teorii punktów stałych

Rozprawa doktorska dotyczy poszukiwania warunków, jakie przestrzeń topologiczna ma spełniać, aby twierdzenia z zakresu punktów stałych i kombinatoryki były spełnione, chodzi o twierdzenia Steinhausa o szachownicy, Borsuka-Ulama, Poincaré-Mirandy, itp. Rezultaty to uogólnione twierdzenie Poincaré-Mirandy, Wielokolorowe Twierdzenie Szachowe Steinhausa na kostce I^n i twierdzenie typu Ky Fana.

Rozdział drugi zawiera potrzebne definicje i oznaczenia używane w dalszej części pracy. Wydaje mi się, że nie był to najlepszy pomysł redakcyjny, ilość przytłacza, a niektóre definicje użyte są dopiero pod koniec pracy. Dla czytelnika wygodniej jest, gdy definicje wraz z komentarzami są przytaczane w miarę potrzeb. W tej części pracy jest najwięcej niejasności i niedomówień:

(1) str. 8, po wprowadzeniu abstrakcyjnego n-sympleksu, dwie linijki dalej opuszcza się słowo „abstrakcyjny". W ostatniej definicji znowu pojawia się „n-sympleks" należy chyba rozumieć abstrakcyjnego n-sympleksu, a dalej mowa jest o triangulacji tego sympleksu, chociaż wcześniej nie została zdefiniowana,
(2) str. 8, z ostatniej definicji trudno mi było zrozumieć, co oznacza kolorowanie Spernera,
(3) str. 8, w definicji kompleksu abstrakcyjnego $\mathcal{K}$ definiuje się wymiar $\dim \mathcal{K}$ przez wymiar sympleksu abstrakcyjnego, ale wcześniej nie ma definicji wymiaru sympleksu abstrakcyjnego,
(4) str. 9, w pierwszej definicji można się tylko domyślać czym jest $\mathcal{K}(\mathcal{S})$,
(5) rys. 2.4 nie przedstawia łańcucha, wbrew opisowi,
(6) str. 9, w Definicji 1 użyto po raz pierwszy symbolu $\mathcal{K}^n$, nie wyjaśniając jaka jest rola indeksu górnego n,
(7) str. 10, w drugiej od góry definicji pojawia się symbol $E(V)$, który nie był wcześniej zdefiniowany.

W rozdziale trzecim dowodzi się Wielokolorowe Twierdzenie Szachowe Steinhausa na kostce I^n, prezentując również algorytm tworzenia łańcucha łączącego przeciwległe ściany. W dowodach wykorzystane są pomysły z publikacji [1], [4]. Poniżej kilka uwag do tego rozdziału.

(1) str. 12, w Wielokolorowym Twierdzeniu Bapata, zamiast T powinno być $V(T)$, w drugim twierdzeniu Bapata, zamiast $T \times [3]$ również $V(T)$,
(2) str. 13, w definicji n-kostki kombinatorycznej powinno być założenie o $\alpha : [n] \to [n]$, że jest permutacją.

W rozdziale czwartym zostało wprowadzone pojęcie n-istotnych wielościanów, aby rozszerzyć zakres przestrzeni dla których pozostaje spełnione twierdzenie Poincaré-Mirandy. Podane są przykłady n-istotnych wielościanów i kompleksów. Definicja n-istotnych wielościanów jest próbą rozszerzenia definicji n-cube-like wielościanów, które pojawiło się w publikacjach [2] oraz [3]. Została przedstawiona konstrukcja n-istotnych wielościanów, dowód o nieparzystej liczbie $(n+1)$- pokolorowanych n-sympleksów w n-istotnym kompleksie oraz algorytm znajdowania łańcucha w n-istotnym wielościanie. Kilka uwag do tego rozdziału poniżej.

(1) str. 17, w wypowiedzi twierdzenia Bolzano, funkcja f jest rzeczywista, więc zgodnie z przyjętymi oznaczeniami w rozdziale drugim powinno być $\mathbb{R}$, zamiast R, podobna uwaga do definicji n-cube-like wielościanu ze str. 18,
(2) str. 18, zła interpunkcja w warunku (B) definicji n-cube-like kompleksu,
(3) str. 19, w Definicji 3 nie określono czym jest v należące do $\mathcal{K}^0$,
(4) brakuje mi szczegółowego opisu na czym polega różnica pomiędzy n-cube-like, a n-istotnym wielościanem,
(5) własności ilustrowane w przykładach powinny być dokładniej opisane,
(6) str. 20, brak definicji „silnie spójny", wydaje się że w Przykładzie 3 powinno być „z silnie spójnymi składowymi",
(7) str. 22, w Przykładzie 8 powinno być $1 \leq j \leq n$,
(8) str. 23, w Definicji 3, nie zdefiniowano czym jest A,
(9) str. 26, w wypowiedzi Lematu 3 jest $\varphi(V(\mathcal{F}_i^-)) \in [i]$, ale $\varphi(V(\mathcal{F}_i^-))$ jest zbiorem,
(10) str.26, 28, w dowodzie Lematu 3 oraz Obserwacji 3 użyto argumentu: „z definicji n-istotnego kompleksu wynika, że $\mathcal{F}_n^- \cap \ldots \cap \mathcal{F}_{n-k}^-$ jest $(n-k)$-istotnym kompleksem", czego bezpośrednio nie zauważyłem z definicji (może trzeba to dodatkowo założyć lub wyjaśnić),
(11) str. 26, w dowodzie Lematu 3 nie dostrzegłem gdzie jawnie wskazuje się, że korzysta się z założenia o funkcji kolorującej,

(12) str. 30, w definicji granicy górnej topologicznej nie wiadomo czym jest zbiór N, bo liczby naturalne oznaczane są symbolem $\mathbb{N}$ na str. 7.

W rozdziale piątym wprowadzono nową klasę przestrzeni n-Borsuk-Ulam wielościanów, dla której wykazano, że spełniona jest wersja twierdzenia Ky Fana. Wykazano również twierdzenie typu Lusternika-Schnirelmana dla n-Borsuk-Ulam wielościanów. Uwagi do tego rozdziału:

(1) brakuje definicji PL-rozmaitości, triangulacji środkowo-symetrycznej i przestrzeni typu Borsuka-Ulama,
(2) nie zauważyłem, gdzie pozycje 9 oraz 16 z Bibliografii są cytowane.

Konkluzja. W rozprawie jest kilka interesujących wyników, choć przykłady jak i niektóre dowody wymagałyby dodatkowych opisów. Pani Piekarska jest współautorką jednej opublikowanej pracy w Topology and its Applications [2], są dostępne podpisane omówienia MR3422742, Zbl 1328.54043. Jest także współautorką dwóch innych prac, w Bibliografii pozycja [25] oraz [26]. Szkoda, że prace te nie są udostępnione w arXiv, co powoduje lepsze upowszechnienie wyników.

Moim zdaniem rozprawa doktorska Pani magister Marii Piekarskiej spełnia wymagania stawiane przez Ustawę o tytule i stopniach naukowych. Wnoszę o dopuszczenie Pani Marii Piekarskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Literatura

[1] [2] R. B. Bapat, *Sperner's lemma with multiple labels. Modeling, computation and optimization*, 257–262, Stat. Sci. Interdiscip. Res., 6, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2009).

[2] M. Kidawa, P. Tkacz, *The cube-like complexes and the Poincaré-Miranda theorem.* Topology Appl. 196 (2015), part A, 198–207.

[3] D. Michalik, P. Tkacz, M. Turzański, *Cube-like complexes, Steinhaus' chains and the Poincaré-Miranda theorem.*, J. Fixed Point Theory Appl. 18 (2016), no. 1, 117–131.

[4] P. Tkacz, M. Turzański, *An n-dimensional version of Steinhaus' chessboard theorem*, Topol. Appl. 155 (2008) 354–361.

Andrzej Kucharski