Recenzja rozprawy doktorskiej

Pana mgra Marcina Łyczaka

pt. „Teorie modalności epistemicznych i ontycznych z pierwotnym pojęciem zmiany. Rozszerzenia logiki zmiany LC”

dla

Rady Dyscypliny Naukowej Filozofia Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

Układ rozprawy

Rozprawa dotyczy klasy logik modalnych, których wspólną cechą jest ‘posiadanie’ w języku co najmniej jednego operatora mającego w zamierzonej interpretacji służyć do wyrażania pojęcia *zmiany*.

Praca składa się z podziękowań, spisu treści, wprowadzenia oraz trzech opublikowanych artykułów:

1. „The Logic of Modal Changes LMC”, *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 2020, 30(1), 50-67,

2. „Belief Changes and Cognitive Development: Doxastic Logic LCB”, *Axiomathes*, 2020,

3. „The Modal Logic LEC for Changing Knowledge, Expressed in the Growing Language”, *Logic and Logical Philosophy*, 2020.

Pierwsza praca prezentuje pewną logikę z dwoma funktorami modalnymi wyrażającymi dwie różne operacje zmiany; w drugiej pracy przedstawiony został system uwzględniający oprócz funktora zmiany, operator wyrażający przekonanie — można zatem w tym przypadku mówić o doksastycznej logice zmiany. Trzecia praca prezentuje logikę, w języku której oprócz funktora zmiany, uwzględniono operatory epistemiczne wiedzy aktualnej i wiedzy stabilnej (trwałej/ugruntowanej). W rozprawie, dla każdego z wprowadzonych systemów wskazano aksjomatyzację wraz ze stosownymi dowodami twierdzeń o trafności i pełności. Pan mgr M. Łyczak zamieścił również porównania z wybranymi ‘pokrewnymi’, znanymi z literatury systemami. W przypadku całej rozprawy, z powodzeniem wykorzystano, zarówno od strony technicznej, jak i celem oddania pewnych intuicji, technikę rozszerzania języka.

Analiza i ocena pracy

Artykuł „The Logic of Modal Changes LMC”

W pierwszej części rozprawy zaprezentowany jest system LMC inspirowany sformułowaną przez prof. K. Świętorzecką logiką zmiany LC. Idea zaczerpnięta jest z teorii zmiany substancjalnej Arystotelesa. Zmiana w tym przypadku jest rozumiana jako przemiana polegająca na znikaniu i stawaniu się indywidualnych substancji, a dokładniej utożsamiana jest z utratą bądź zyskaniem istotnych (koniecznych) bądź akcydentalnych (przypadkowych) atrybutów. Formalnym odpowiednikiem ‘przechodzenia’ w obu kierunkach, czyli stawania się i zanikania, w języku logiki LC jest operator C, odczytywany jako „zmienia się to, że. . . ”. Przekształcenie jednej substancji w inną jest modelowane semantycznie przez kolejne rozszerzania słownika, co generuje ciąg rozszerzeń pewnego języka wyjściowego. Otrzymany w ten sposób język podzielony jest w naturalny sposób na poziomy, które mogą być użyte do interpretowania poszczególnych etapów zmiany.

W języku logiki LMC mamy dwa wzajemnie niedefiniowalne funktory wyrażające zmianę; w zamierzeniu mają one nawiązywać do zmiany atrybutów przypadkowych i koniecznych. Zatem zmiana ma tu charakter ‘atrybutowy’. Głównym wynikiem tego artykułu jest wskazanie aksjomatyzacji rachunku LMC wraz ze stosownym dowodem pełności. Podobnie jak to ma miejsce w przypadku języka LC, technika rozszerzeń języka wyjściowego stosowana jest do języka logiki LMC.

Jak wspomniano powyżej, w przyjętym na gruncie LC rozumieniu pojęcia zmiany, chodzi o zmiany istotnych i akcydentalnych atrybutów poszczególnych substancji. Zmiany te nie mają jednak symetrycznych skutków. Zmiana atrybutów akcydentalnych substancji nie oznacza zmiany statusu bytowego, zatem substancja, która ulega zmianie w zakresie swoich akcydentalnych atrybutach, nadal istnieje. Utrata zaś istotnego atrybutu powoduje zniknięcie samej substancji, innymi słowy, substancja, która traci swój atrybut istotny, przestaje istnieć. Postępując za tymi zależnościami, w przypadku języka logiki LMC, w pracy rozważany jest formalizm z dwoma inspirowanymi właśnie przez zmiany akcydentalnych i istotnych atrybutów, funktorami modalnymi; nie są one wzajemnie powiązane modalnym wariantem warunku de Morgana, łączącego funktory możliwości i konieczności przykładowo na gruncie standardowych logik modalnych. Intuicyjnie, zmiana może stanowić podstawę czy narzędzie do wyrażania zależności czasowych, od strony zaś formalnej — posłużyć do wyrażenia logik temporalnych; przykłady tego typu zależności łączących logikę LMC z innymi systemami znajdujemy w końcowej części pracy.

Według Arystotelesa dany atrybut musi być albo danej rzeczy przyporządkowany albo zaprzeczony. W semantyce, zasadzie tej odpowiada albo zaliczenie świata danego poziomu do zbioru odpowiadającego atomowi tego poziomu (lub poziomu niższego), albo nie. Natomiast nie jest określona wartość logiczna w przypadku atomów poziomu wyższego niż dany atom. Oddaje to sytuację, gdy język nie jest wystarczająco bogaty, by wyrazić świat czy jakiś fragment świata.

Przyjęty warunek ($\sigma 2$), mówiący, że każdy świat może być opisany tylko przez jeden poziom języka, nie pozwala w szczególności na mieszanie opisów wyrażonych w językach o różnych poziomach. Powstaje naturalne pytanie, co zmieniłoby się, gdyby ten warunek pominąć. Czy np. zawieszenie tego warunku dawałoby semantykę wystarczającą dla badań antynomii semantycznych?

Dodatkowo, dla każdego możliwego świata w poziomu n (tj. gdy $w \in \sigma(n)$) funkcja t przypisuje niepusty zbiór światów, w którym interpretowane będą wyrażenia poziomu o jeden wyższego. Funkcja ta jest istotnie wykorzystywana w określeniu warunków prawdziwościowych dla operatorów $\mathfrak{c}$ i $\mathfrak{C}$. Warunki semantyczne gwarantują również, że światy, które w intuicyjnym rozumieniu podlegają zmianie, należą do zbioru światów, które służą do interpretacji wyrażeń kolejnego rozszerzenia języka.

W pracy, poza dowodem twierdzenia o trafności aksjomatyzacji, przedstawiono dowód twierdzenia o pełności. Prowadzony jest on odpowiednio zaadoptowaną do specyfiki prezentowanego rachunku metodą Henkina, stosowaną dla logik modalnych. W szczególności, kluczowe jest odpowiednie zdefiniowanie modelu kanonicznego, który uwzględnia poziomy światów, odpowiednie relacje łączące światy i odpowiednie określenie funkcji wartościowania w modelu, której w pracy odpowiada funkcja 'historii zmian modalnych'.

Choć, jak widzimy, mamy w pracy nawiązania do teorii zmiany Arystotelesa, to jednak celem tego artykułu nie jest stworzenie systemu, który wiernie oddawałby cały aparat pojęciowy tej teorii. Chodzi tu raczej o zaproponowanie formalnego aparatu pojęciowego umożliwiającego—np. przez rozpatrywania pewnych specyficznych teorii aksjomatycznych, które zapewne wprowadzałyby definicyjne aksjomaty wyrażające własności poszczególnych pojęć modelowanej teorii—wybranych fragmentów teorii Arystotelesa.

Na koniec przedstawiono porównanie przedstawionej logiki z wybranymi systemami. I tak, znajdujemy porównania z systemem LEA João Marcosa. Mgr M. Łyczak pokazał, że na gruncie LMC definiowalne są operatory „...jest akcydentalne" i „...jest istotne", charakterystyczne dla logiki LEA. Jak wykazał Doktorant, przy zastosowaniu naturalnej translacji modalnej, odwrotna zależność nie zachodzi — system LEA jest za słaby na wydefiniowanie operatorów logiki LMC.

Artykuł "Belief Changes and Cognitive Development: Doxastic Logic LCB"

Druga praca w cyklu dotyczy szeroko badanej kwestii zmiany przekonań. Temat ten podejmowany jest przez filozofów, kognitywistów i specjalistów od sztucznej inteligencji. Specyfiką proponowanego rozwiązania jest opis zmiany przekonań agenta przy użyciu ciągu rozszerzeń języka. Jak wiadomo, przekonania nie są z konieczności prawdziwe, zatem mogą podlegać zmianom.

Jedną z ważnych kwestii stawianych w ramach epistemologii jest pytanie: kiedy jest uzasadnione dodawanie bądź usuwanie przekonań traktowanych jako znane. Rozwiązanie prezentowane w pracy wskazuje na związek z rozszerzeniami języka dokonującymi się na skutek gromadzenia doświadczeń. Inne, ważne rozpatrywane pytanie, to: jak zmieniają się pojęcia. W prezentowanym ujęciu zakłada się, że zdobywanie doświadczeń wpływa na aparat pojęciowy, co wiąże się między innymi z ciągłym wzbogaceniem języka.

Wynikiem przedstawionych badań jest logika modalna LCB, znów wyrażona w języku, który nadbudowano nad rosnącym względem inkluzji ciągiem zbiorów formuł/wyrażeń atomowych. Jest ona rozszerzeniem normalnej logiki $\mathsf{KD45}$ o aksjomaty i reguły charakteryzujące operator zmiany. Dzięki udowodnionemu twierdzeniu o trafności, wiemy, że na gruncie LCB, w ogólności, nie są zależne stwierdzenia wyrażające przekonania o zmianie oraz te, które wyrażają zmianę przekonań. Jednak w przypadku braku przekonań odnośnie jakiejś wypowiedzi, przy jednoczesnej zmianie tego stanu, na gruncie LCB obowiązuje przekonanie o równoważności samej wypowiedzi i jej stałości. Mamy też zasadę wyrażającą zależność, że przekonanie wraz z niezmiennością tego przekonania implikuje przekonanie o niezmienności danego sądu. Oczywiście konsekwencją przyjętych definicji jest to, że brak przekonań w jakimś względzie, nie implikuje przekonania o zachodzeniu zaprzeczenia sądu.

Dodatkowo, mamy odniesienie do logiki przekonań powiązanej z operatorem „bycia świadomym czegoś”, gdzie wprowadza się jawne przekonania (explicit beliefs), czyli przekonania, których agent jest świadomy. W ujęciu tym, wszystkie stwierdzenia, które są jawnymi przekonaniami, są również przekonaniami *implicite* agenta, ale nie na odwrót. Owe jawne przekonania są przedmiotem epistemicznych wersji logiki modalnej, gdzie jawne przekonania są ograniczone do formuł, które podmiot ma w swojej świadomości. Autor rozprawy pokazuje, jak pewne doksastyczne rozszerzenie logiki $\mathsf{KD45}$ wzbogacić o operator wyrażający świadomość i definiowalny funktor wyrażający jawne przekonania. Rozważania na ten temat mają jednak tylko charakter informacyjny i nie poddawane są głębszej analizie metalogicznej.

W zaprezentowanej semantyce mamy z jednej strony zachowanie standardowej semantyki możliwych światów, z drugiej zaś, wprowadzenie struktury pozwalającej na interpretację wyrażeń z różnych poziomów języka. W tym przypadku, celem ‘powielenia’ warunków semantycznych dla relacji dostępności na kolejnych poziomach, nakłada się warunek kongruencyjnności: przy rozszerzeniu języka n do języka $n+1$, agent ma dostęp do odpowiednich aktualizacji, w szczególności, jeśli świat u został zaakceptowany jako dostępny (w sensie możliwych przekonań) ze świata w na poziomie n, to jeśli w zostanie zaktualizowane do w', a u do u', to u' jest dostępne ze świata w' w poziomie $n+1$. Przy dowodzie twierdzenia o pełności odnajdujemy uprzednio stosowaną technikę modelu kanonicznego, zaadoptowaną do konieczności przenoszenia 'obliczeń' przy weryfikowania warunków semantycznych na wyższy poziom 'duplikowanej' relacji dostępności. W pracy rozważane są związki z innymi systemami, w szczególności, wskazano na równoważność rozszerzenia LCB o definicję funktora 'następnie zachodzi to, że ...' z pewnym rozszerzeniem epistemicznym wariantu fragmentu logiki temporalnej czasu liniowego.

Artykuł „The Modal Logic LEC for Changing Knowledge, Expressed in the Growing Language"

Trzecia praca prezentuje logikę LEC — kolejne rozszerzenie logiki LC. W tym przypadku pierwotny operator C ma w zamierzonej interpretacji nadal znaczyć: „zmienia się to, że... ", ale ma wyrażać następstwo czasowe stanów rzeczy. Formalnie, w aksjomatyce dla samego LC użyto w jednym przypadku nieco innego aksjomatu, jednak na gruncie całego systemu, obie używane aksjomatyzacje są równoważne. Poza tym dodano dwa pierwotne operatory epistemiczne: k („agent aktualnie wie, że ... ") i K („agent stabilnie (trwale) wie, że ... "). Wiedza obecna może zmieniać się w czasie. Jeśli jednak wiedza aktualna nigdy się nie zmienia, staje się wówczas wiedzą stabilną (trwałą). Stabilna/ugruntowana wiedza nie zmienia się i zakłada się jej aktualność. Obcięcie LC do języka z k traktowanym jako konieczność, to logika S5. Ponadto pokazano, że fragment rozważanej logiki w języku z funktorem oddającym wiedzę ugruntowaną, to normalna logika S4.3.

Artykuł ten również zawiera dowody twierdzeń o trafności i pełności. Podobnie jak w przypadku poprzednich dwóch prac, artykuł zwieńczony jest porównaniem z jednej strony logik powiązanych z LEC, z drugiej zaś tych, które są zależne od logiki temporalnej czasu liniowego LTL. Autor dyskutuje również możliwość uzyskania analogicznego powiązania logiki LEC, jednak tym razem z logikami czasu rozgałęzionego.

Uwagi szczegółowe i sugestie drobnych poprawek

Należy podkreślić, że prezentowane prace są napisane starannie i stanowią świadectwo wysokiego poziomu warsztatu logicznego Doktoranta. Poniższe uwagi mają charakter jedynie sugestii, a ewentualne odnalezione usterki dają się łatwo skorygować.

Uwagi do artykułu „The Logic of Modal Changes LMC"

1. Przy intuicyjnej wersji odczytania warunku (LC3), s. 53 (s. 12 pracy) potrzebna jest drobna korekta: "then (A then B) change" $\rightarrow$ "then (A then B) changes".

2. Podsekcja 3.2 “The axiomatisation of LMC” — aby definicja była istotnie indukcyjna, zamiast J, K, należałoby użyć odpowiednio np. K_1 oraz K_{n+1}. Poza tym, z opisu wynika, że w formalnym zapisie należałoby dodać: $\{\alpha_k^{n+1}\}_{k\in K_{n+1}} \backslash \mathsf{At}^n \neq \varnothing$, oraz $K_n \neq \varnothing$, dla każdego k.

3. Pod Definicją 3.1 czytamy:

   > In otherwords, the minimal level of a formula A is the level at which formula A occurs for the first time. For instance the minimal level of the formula $\alpha_j^5 \wedge \alpha_n^6$ is 6 and it is not a formula of any levels from 1 to 5.

   Użyto metafory “formula A occurs for the first time”, która sugeruje porządek lub następstwo czasowe. Jednak żadne z nich nie są *explicite* zdefiniowane. Lepiej chyba byłoby powiedzieć bardziej precyzyjnie, że chodzi o minimum zbioru tych wszystkich n, że dana formuła należy do n-języka.

4. Przy odczytywaniu formuły ($\mathfrak{c}\mathfrak{C}2$), mamy odniesienie do drugiego czynnika poprzednika implikacji za pomocą:

   A must not change

   jako frazy odpowiedniej dla formuły o postaci $\neg\mathfrak{c}A$. Ale jak zauważono, $\mathfrak{c}$ oraz $\mathfrak{C}$ nie są wzajemnie definiowalne, podczas gdy literalnie, w przypadku obu fraz odpowiadających tymże funktorom (gdy w szczególności $\mathfrak{c}$ jest zanegowane) występuje “must”. Podobne wrażenie można odnieść przy podanym odczytaniu warunku ($\mathfrak{c}\mathfrak{C}4$), gdzie tym razem $\neg\mathfrak{C}A$, jest odczytywane jako “A may not change”. Oczywiście jest to tylko specyfika języka angielskiego i użyte formuły są językowo poprawne, jednak może warto byłoby wskazać alternatywny sposób odczytywania tychże formuł, który nie sugerowałby potencjalnej wzajemnej definiowalności.

5. W przypadku dowodu tezy (T3): $\mathfrak{c}(A \vee B) \rightarrow \mathfrak{c}A \vee \mathfrak{c}B$ mamy w opisie dowodu wskazane tylko aksjomaty ($\mathfrak{c}2$), ($\mathsf{T2}$) i regułę (Er), i choć istotnie one wystarczą, to cały dowód—jak się wydaje—zawiera sześć przejść.

   Można odnotować przy tej okazji pewną ogólną tendencję do lapidarności opisu przejść dowodowych dającą się zauważyć w całej rozprawie.

6. Definition 4.1 — nie wydaje się poprawne używanie jakiegoś parametru do urabiania nazwy ogólnej oraz do wskazywania jakiegoś poszczególnego desygnatu tejże nazwy. Mamy zatem definicję $\mathcal{A}$-structure a przy wskazaniu postaci struktury przypisuje się tę samą literę $\mathcal{A}$. To powoduje swego rodzaju zapętlenie; przykładowo, w definicji 4.2 w konsekwencji mielibyśmy: “For any $\mathcal{A}$-structure $\mathcal{A}$,[. . .]”.

   Podobną uwagę można poczynić w odniesieniu do “Definition 2 ($\mathfrak{B}$-structure)” w pracy “Belief Changes and Cognitive Development: Doxastic Logic LCB”, gdzie wprost zastosowano taki ‘zapętlony’ zapis, czytamy bowiem: “$\mathfrak{B}$-structure is $\mathfrak{B}$ [. . .]”.

7. Definition 4.3 powinno być: “If α_j^m is an atom of level n” zamiast “If α_j^m is a formula of level n”

8. W dowodzie Theorem 4.1 dla ($\mathfrak{c}\mathfrak{C}2$): w przypadku $\mathcal{A}, \psi, w^n \not\models^n n$, dla uzyskania sprzeczności, należałoby powołać się jeszcze na pierwszą podaną konkluzję wynikającą z (a).

9. W Definition 4.6 przed ‘$A \notin X^n$’ brakuje ‘if’.

10. Lemma 4.4: raczej nie powinno się stosować zapisu klamrowego w przypadku zbioru, który w zamierzeniu ma być nieskończony. Dobrze byłoby też podać dowód ($\mathfrak{C}2$) w wersji uogólnionej (dla n argumentowej koniunkcji w poprzedniku) — taka wersja jest potrzebna w dowodzie Lematu 4.4.

Na s. 62, w 3 linijce od końca dowodu Lematu 4.4 mamy:

"because $B = B_1 \wedge \cdots \wedge B_l \in X^n$",

jednak odniesienie do tej koniunkcji jest zbędne, wystarczy tak naprawdę informacja, że $D_1 \vee \cdots \vee D_m \in X^n$ (fakt, że $\mathfrak{C}\neg(B \wedge D) \in X^n$ wynika z ($\mathfrak{C}$1) oraz wcześniejszego ustalenia, że $\mathfrak{C}(B \wedge D) \in X^n$).

11. Wydaje sie, że w dowodzie lemacie 4.5, założenie 'there is no $D_1, \ldots, D_k, \mathfrak{C}D_1, \ldots, \mathfrak{C}D_k$ belonging to X^n' nie jest wykorzystywane; gdyby to podejrzenie było prawdziwe, to oczywiście lemat tym bardziej jest prawdziwy.

12. Dowód lematu 4.6 — mamy "as in Lemma 4.4", jednak raczej należałoby napisać "as in the proof of Lemma 4.4".

13. Na stronie 63 mamy wprowadzoną formułę A, dla której $\mathsf{Lv}(A) = k$, zaś w Definition 4.7 mamy zmienną podkwantyfikatorową A. Formalnie nie jest to błąd (A jest związane), jednak lepiej byłoby użyć innej zmiennej.

14. W bibliografii zamiast "Marcos, J. (2015)" powinno być "Marcos, J. (2005)".

Uwagi do artykułu "Belief Changes and Cognitive Development: Doxastic Logic LCB"

15. W opisie ($\mathcal{CB}$1) czytamy:

> To describe that the agent is self-aware in relation to his beliefs, we assume in ($\mathcal{CB}$1) that a change of the agent's unbelief in A (to a belief in A) always results in belief in A

jednak zapis ten należy raczej rozumieć jako tylko przybliżone odczytanie ($\mathcal{CB}$1); samo ($\mathcal{CB}$1) literalnie 'mówi' mniej, choćby dlatego, że w poprzedniku mamy jeszcze czynnik $\neg\mathcal{B}A$ (pomijając już kwestię samego następnika).

16. Sekcja 2 (s. 29), w definicji At^n znów dla zachowania indukcyjnego jej charakteru, należałoby przyjąć zamiast J i K, odpowiednio np. K_1 oraz K_{n+1}.

17. W Definition 2 (s. 30), w p. 6 powinno być $\mathbf{B}^n$ zamiast $\mathbf{B}$.

18. W pierwszej linijce dowodu Theorem 1 (s. 34) jest dwa razy "$\mathcal{C}$2" — w miejsce drugiego wystąpienia "$\mathcal{C}$2" powinno być "$\mathcal{C}$3".

    W czwartej linijce dowodu Theorem 1 należałoby kwantyfikować c^n, dodając 'there exists c^n'; poza tym, zamiast $w^n R^n c^n$ powinno być $w^n B^n c^n$.

    Linijka 6 tego dowodu — brakuje spójnika łączącego składowe zdania.

19. Aby w dowodzie Lematu 8, na końcu móc skorzystać z ($\mathcal{CB}$1), zamiast $\neg\mathcal{B}((F^* \to \neg\mathcal{C}F^*) \wedge (\neg F^* \to \mathcal{C}\neg F^*)) \in w^n$ raczej należałby pokazać, że $\neg\mathcal{B}((F^* \to \neg\mathcal{C}F^*) \wedge (\neg F^* \to \mathcal{C}F^*)) \in w^n$. Dowód taki daje się przeprowadzić powtarzając dowód podany, przy czym pod jego koniec wystarczy skorzystać z maksymalności i ($\mathcal{C}$1).

20. Przy końcu dowodu Lematu 8 — uzyskanie konkluzji $\neg\mathcal{B}F^* \in w^n$ dobrze byłoby opatrzeć odwołaniem do (u^{b}).

21. W definicji, w warunku (s2), na s. 35 czytamy:

> W^{n+1} is such that: $\forall_{w^n \in W^n} \exists_{w^{n+1} \in W^{n+1}} \ldots$

Jednakże, wydaje się, że sformułowanie to powinno być nieco skorygowane. Jest mowa tylko o tym, że element pewnej postaci należy do W^{n+1}. Raczej należałoby powiedzieć, że W^{n+1} jest ogółem zbiorów maksymalnie $n+1$-niesprzecznych, które są odpowiednio skonstruowanymi rozszerzeniami elementów ze zbioru W^n.

Uwagi do „The Modal Logic LEC for Changing Knowledge, Expressed in the Growing Language"

22. Wydaje się, że drugie wystąpienie "all" w drugiej linijce podsekcji 2.1 jest zbędne.

23. Jeśli chodzi o odczytywania $\mathcal{A}A$, zamiast "This abbreviation says:" raczej powiedziałoby się, że ów skrót w zamierzonej interpretacji równoważnie wyraża to a to; ponadto, w tym przypadku uzasadnieniem jest to, że po rozpisaniu podana metajęzykowa równoważność jest podstawieniem tautologii klasycznej $(p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)) \leftrightarrow q$.

    Dobrze byłoby zasygnalizować również szkic dowodu równoważnościowego warunku semantycznego uzasadniającego podane odczytanie skrótu $\mathcal{A}^m A$, które wynikałoby z jego określenia i przyjętych warunków semantycznych.

24. Ogólnie, znów niektóre dowody są podane dość skrótowo: np. mamy bardzo krótki szkic dowodu tezy w *Remark 2.1* (s. 10 pracy nr 3): $A \wedge B \wedge CA \to C(A \wedge B)$.

25. Dowód (4_{K}) (dowód Theorem 1), krok 5 — można byłoby dodać, że stosuje się kontrapozycję podstawienia do kroku 4.

    W kroku 7: zamiast ($\mathsf{Kk1}$) powinno być (KC).

26. Dowód ($\mathtt{K}_{\mathsf{K}}$): żeby formuła w pierwszej linijce istotnie była 'krokiem wyjściowym' dowodu indukcyjnego, to zamiast $\vdash \mathsf{K}(A \to B) \to \mathsf{T}^0(\mathsf{K}\,A \to \mathsf{k}\,B)$ należałoby napisać $\vdash \mathsf{K}(A \to B) \to (\mathsf{K}\,A \to \mathsf{T}^0\,\mathsf{k}\,B)$ (oczywiście obie wersje są równoważne).

27. Dowód dla (L1): zamiast ($\mathsf{kC1}$) powiino być ($\mathsf{Kk1}$).

28. Dowód dla (L2) — warto może byłoby wspomnieć, że punktem wyjścia jest podstawienie tautologii: $B \to \neg(A \wedge \neg B)$, a na koniec zastosowana jest kontrapozycja.

29. W pierwszym kroku dowodu '$\vdash \mathsf{K}(\mathsf{K}\,A \to B) \vee \mathsf{K}(\mathsf{K}\,B \to A)$' od razu można byłoby wstawić A zamiast $\mathsf{K}\,B \wedge \neg\,\mathsf{K}\,B$. W kroku 5 powinno być $\neg\,\mathsf{C}(\neg\,\mathsf{K}\,\neg(\mathsf{K}\,A \wedge \neg B) \to \mathsf{T}^{\leqslant n}\,\mathsf{k}(\mathsf{K}\,B \to A))$ ($\neg\,\mathsf{C}$ powinno być funktorem głównym); w kroku 7, zamiast 3 należałoby odwołać się do ($\mathsf{T}^{\leqslant m}$); w kroku 9 w następniku powinno być: $\neg\,\mathsf{k}\,\neg(\mathsf{K}\,A) \vee \neg\,\mathsf{C}\,\neg\,\mathsf{K}(\neg\,\mathsf{K}\,A \wedge \neg B)$; poza tym, pełne uzasadnienie wymagałoby odniesienia do logiki klasycznej i reguły (gen k) oraz ($\mathtt{K}_{\mathsf{k}}$).

30. Wprowadzenie ciągu (S_j) byłoby bardziej czytelne, gdyby rozpoczęto od sformułowania Lematu 4, pozwala on na zastosowanie niedeterministycznej operacji — oznaczmy wynik jej zastosowania dla A przez $A^{\leqslant m}$); potem można byłoby określić sam ciąg (S_j) dla wszystkich $j \in N$, rozważając 4 przypadki: po dwa dla 'wynikowego' zbioru o numerze nieparzystym i po dwa dla 'wynikowego' zbioru o numerze parzystym; obecnie, generowanie wyrazów ciągu kończy się $j = 1$ i czytelnik nie jest poinformowany o tym, że musi poczekać na dalszy ciąg procedury wynikającej już z tegoż lematu.

31. W odniesieniu do warunku dla W^{n+1}, zamiast $(n > i)$ powinno być $(n \geqslant i)$.

32. W dowodzie Lematu 7 mamy:

"there is $t \in \{\mathsf{u}_\star(s) : s \in \mathsf{d}_\star(n)\}$ such that (a2): $F^* \notin \mathsf{u}_\star(t)$"

Istotnie, t ma postać $\mathsf{u}_\star(s)$, dla pewnego $s \in \mathsf{d}_\star(n)$, ale niekoniecznie $\mathsf{u}_\star(t) = t$. Żeby zapisać ten fragment dowodu wystarczy zacząć od kwantyfikatora przebiegającego $\mathsf{d}_\star(n)$: there is $t \in \mathsf{d}_\star(n)$, such $F^* \notin \mathsf{u}_\star(t)$'.

Pewien być może drobny niedosyt pozostawiają niektóre rozważania natury filozoficznej inspirowane przedstawionymi w rozprawie logikami (takie odczucia przykładowo rodzi przedstawienie problemów wiążących się z *negatywną retrospekcją*). Z drugiej jednak strony, dyskusja filozoficzna ma najwyraźniej na celu tylko zasygnalizowanie pewnych możliwości interpretacyjnych i dyskusji zarysowanych wątków, jest tak gdyż zasadniczo artykuły składające się na rozprawę w znaczącej mierze mają charakter formalny, a wspomniane wątki interpretacyjne i porównawcze mogą stanowić materiał wyjściowy do pogłębionej dalszej analizy, wchodząc w skład przyszłych, osobnych prac badawczych.

Podsumowując, należy stwierdzić, że rozprawa prezentuje zaawansowane wyniki z zakresu logiki filozoficznej. Wziąwszy pod uwagę złożoność prezentowanego materiału, trzeba stwierdzić, że praca jako całość jest bardzo dobrze napisana, a ewentualne drobne uchybienia są nieliczne i można je łatwo skorygować.

Konkluzja

W świetle przedłożonej opinii o rozprawie doktorskiej pt. *Teorie modalności epistemicznych i ontycznych z pierwotnym pojęciem zmiany. Rozszerzenia logiki zmiany* LC uważam, że jej autor, Pan mgr Marcin Łyczak jest sprawnym badaczem wykazującym się wysokimi kompetencjami logicznymi a recenzowana rozprawa jest zaawansowana technicznie, odzwierciedla aktualny stan badań, ale też wnosi do tychże badań istotne *novum*.

Podsumowując, stwierdzam że zgodnie z zapisami *Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki* spójny tematycznie zbiór artykułów mgra Marcina Łyczak stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego polegającego na przebadaniu grupy systemów logicznych interpretowanych epistemicznie i spełnia w związku z tym wymogi stawiane rozprawom w przewodach doktorskich. Wnioskuję zatem o dopuszczenie Autora rozprawy do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Toruń, 5 września 2020 r.

dr hab. Marek Nasieniewski, prof. UMK