Dr hab Andrzej A. Szymanski
Professor Emeritus
Department of Mathematics and Statistics
Slippery Rock University of Pennsylvania
Slippery Rock, PA 16057
U.S.A.

Recenzja rozprawy doktorskiej

Maria Piekarska, *Metody kombinatoryczne w teorii punktow stalych*

Podstawy wielu wspolczesnych naukowych teorii zostaly zapoczatkowane przez odkrycie (= udowodnienie) bazowych faktow matematycznych. Twierdzenie Bouwera o punkcie stalym jest jednym z takich przelomowych odkryc. Jest ono rowniez w centrum rozwazan tej pracy doktorskiej.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer, matematyk i filozof holenderski, udowodnil w 1912 roku, ze kazda funkcja ciagla na kuli (lezacej w przestrzeni euclidesowej) w siebie ma punkt staly. Samo twierdzenie i mozliwosci jego roznorakich zastosowan staly sie impulsem dla rozwoju wielu teorii czysto matematycznych (np. topologii, analizy funkcjonalnej, rownan rozniczkowych) ale rowniez, np., w ekonomii, teorii gier oraz naukach socjalnych.

W recenzowanej pracy doktorskiej, twierdzenie Brouwera jest rozwazane w trzech roznych formach. Pierwsza z nich (Rozdzial 3) ma postac kombinatoryczna, druga (Rozdzial IV) jest w postaci uogolnionego twierdzenia Bolzano, natomiast trzecia (Rozdzial V) wystepuje jako twierdzenie o antypodach.

Kombinatoryczna wersja twierdzenia Brouwera i stowarzyszona z nia ($n-$ wymiarowa) kostka kombinatoryczna (zob. str. 13, Definicja) sa zazwyczaj przypisywane H.W. Kuhn-owi, [K], i znane pod nazwa *kostkowego lematu Spernera* (*cubicle Sperner lemma*)[1]. Sam lemat, a szczegolnie technika z nim zwiazana, byly eksploatowane i stosowane uprzednio. Z wielu publikacji wymienmy tylko [KL], [KST], [W] poniewaz maja one powiazania z niniejsza praca doktorska. Glowny wynik z Rozdzialu III (Lemat 1; zobacz komentarze do Rozdzialu III, ponizej) jest jeszcze jednym, bardzo zaawansowanym, zastosowaniem kostkowego lematu Spernera.

Uogolnione twierdzenie Bolzano, ktore jest wiodacym tematem dla Rozdzialu IV, jest uogolnieniem klasycznego twierdzenia Bolzano z $1-$ wymiarowej kostki (= domkniety przedzial $[a, b]$) na $n-$ wymiarowa kostke $[a, b]^n$ i znane jako twierdzenie Poincaré - Mirandy. Najbardziej zaawansowane uogolnienie twierdzenia Bolzano, podobne w strukturze do kostkowego, zostalo udowodnione ostatnio przez Michalik, Tkacza i M Turzańskiego [MTT]. Glowny wynik z Rozdzialu IV uogolnia w istotny sposob rezultat Michalik, Tkacza i Turzańskiego (zob. Twierdzenia 4 i 5, str. 31 - 32).

[1] Dla kompletnosci trzeba dodac, ze bardzo podobna idee mial H. Lebesgue juz w 1921 roku (por. [L], ponizej).

Twierdzenie Borsuka-Ulama o antypodach, ale w stylu twierdzenia Lusterika-Schnirelmana, stanowi motyw przewodni w zamierzonych rozwazaniach Rozdzialu V. Kulminacja tego rozdzialu jest Twierdzenie 6 na str. 41, ktore stwierdza, ze twierdzenie Lusternika - Schnirelmana moze byc prawdziwe dla przestrzeni nazwanych $n-$ Borsuk - Ulam kompleksami.

Dyskusja

Rozdzial III. Bazowa $n-$ wymiarowa kostka kombinatoryczna to produkt kartezjnski dwu-elementowego zbioru (np. $\{0,1\}$ jak w oryginalnym ujeciu kuhnowskim lub $\{a_1,a_2\}$ w ogolnych przykladach) do potegi n razem z kanoniczna triangulacja na $n!$ $n-$ wmiarowych sympleksow (podajac tylko wspolrzedne ich wierzcholkow). $n-$ wymiarowa kostka kombinatoryczna $\mathcal{I}^n(k)$ jest rozwazana jako kartezjanski produkt zbioru dyskretnego $\{1,2,..,n-1,n\}^n$ razem z kolekcja bazowych $n-$ wymiarowych kostek kombinatorycznych w ilosci k^n. W $n-$wymiarowej kostce kombinatorycznej $\mathcal{I}^n(k)$ mozna wyroznic kolekcje $2n$ przeciwleglych (lub naprzeciwleglych jak jest uzywane czesto w pracy) scian $\mathcal{F}_i^-(k)$ oraz $\mathcal{F}_i^+(k)$, ktore stanowia brzeg takiej kostki, $\partial\mathcal{I}^n(k)$. Tkacz i Turzanski $[TT]$ pokazali, ze dla dowolnego kolorowania wierzcholkow kostki $\mathcal{I}^n(k)$ na co najwyzej n kolorow mozna znalezc lancuch sympleksow, $S_1, S_2, .., S_m$, wyselekcjonowanych z triangulacji kanonicznych sympleksow, ktore lacza $i-$ te przeciwlegle sciany i kazde dwa sasiadujace sympleksy maja dokladnie takich samych i kolorow. Glowny wynik z Rozdzialu III orzeka co nastepuje.

Dane sa $l_1, l_2, .., l_{n+1}$ kolorowania wierzcholkow kostki $\mathcal{I}^n(k)$. Kazde z nich wybiera kolory z z tej samej kolekcji n kolorow. Wtedy mozna znalezc ciag roznych wierzcholkow, $v_1, v_2, .., v_m$, oraz roznych kolorowan $l_{j_1}, l_{j_2}, .., l_{j_m}$ majacych nastepujace wlasnosci: pierwszy i ostatni z wierzcholkow leza w przeciwleglych scianach $\mathcal{F}_{i_0}^-(k)$ oraz $\mathcal{F}_{i_0}^+(k)$; kolorem przypisanym wierzcholkowi v_i przez kolorowanie l_{j_i} jest zawsze i_0 dla kazdego $i = 1,2,..,m$.

Fakt ten jest znacznym wzmocnieniem twierdzenia Tkacza i Turzańskiego. Co prawda dostaje sie wersje (przez powtorzenie kolorowan) tylko dla jednego wspolnego koloru dla sasiadujacych sympleksow ale rowniez otwiera droge, np., dla rozwiazania problemu Steinhausa w wielowymiarowym problemie szachowym.

Rozdzial IV. Wyniki prezentowane w tym rozdziale sa bardzo bliskie, i w tresci i w motywacjach, do rezultatow otrzymanych przez Michalik, Tkacza i Turzańskiego w pracy $[MTT]$. Nicia przewodnia dla obu prac byla idea rozszerzenia twierdzenia Poincaré - Mirandy na szersza klase przestrzeni zawierajaca zwarte kostki euclidesowe dowolnego wymiaru. Poniewaz twierdzenie Poincaré - Mirandy wymaga specjalnych zalozen zwiazanych z bardzo specyficzna struktura kostki, uogolnienia sa zrobione w taki sposob by utrzymac podobna budowe. Michalik, Tkacz i Turzański otrzymali wymagany stan rzeczy wyrozniajac kompleksy symplicjalne w abstrakcyjnej formie, tzn., podajac tylko kolekcje wierzcholkow simpleksow z kompleksu, i postulujac aby:

kazda sciana o jeden wymiar mniejszy niz wymiar calego kompleksu i nie nalezaca do jego brzegu byla przecieciem dokladnie dwoch pelnych sympleksow;

istnialy podkompleksy grajace role przeciwleglych scian i spelniajacych podobne warunki jak przeciwlege sciany kostek. (Zobacz Definicja na stronie 17.)

Uogolniego tej koncepcji podane w Rozdziale 4 rozni sie tylko w jednym punkcie: postuluje sie by kazda sciana o jeden wymiar mniejszy niz wymiar calego kompleksu byla przecieciem **najwyzej** dwoch pelnych sympleksow. Na pozor jest to niewielka zmiana, jednak w rzeczywistosci powodujaca istotne perturbacje i w samym podejsciu do problemu i w metodologii jego rozwiazania.

Aby rozwiazac sam problem, tzn. udowodnic twierdzenie Poincaré - Mirandy dla wprowadzonych $n-$ istotnych kompleksow symplicjalnych $|\mathcal{K}^n|$, rozwija sie najpierw bardzo nowatorski aparat kombinatoryczny.

Do tego celu uzywa sie metode generowania, przez dowolny $n-$ wymiarowy sympleks o wierzcholkach $v_1, v_2, .., v_{n+1}$, kolekcje $n+1$ $(n+1)-$ wymiarowych sympleksow oznaczona przez $dc\left(\{v_1, v_2, .., v_{n+1}\}\right)_a^b$. De facto, jest to wziete z pracy $[MTT]$. Jednakze nastepny krok jest oryginalny i mozna go zdefiniowac indukcyjnie w nastepujacy sposob. Dla danego rosnacego ciagu liczb $t_1 < t_2 < ... < t_m < t_{m+1}$ oraz dowolnego abstrakcyjnego kompleksu symplicjalnego $\mathcal{K}$: $\mathcal{K} \overset{\circ}{\times} \{t_1, t_2\} = \bigcup\limits_{S \in \mathcal{K}} dc(\{S\})_{t_1}^{t_2}$; $\mathcal{K} \overset{\circ}{\times} \{t_1, t_2, , .., t_{m+1}\} = \mathcal{K} \overset{\circ}{\times} \{t_1, t_2, , .., t_m\} \cup \bigcup\limits_{S \in \mathcal{K}} dc(\{S\})_{t_m}^{t_{m+1}}$. (Por. str. 24, Denicja 6.)

W Rozdziale IV pokazane sa dwa wartosciowe fakty kombinatoryczne.

Fakt 1 (= Lemat 2, str. 25). Jezeli $\mathcal{K}$ jest $n-$ wymiarowym istotnym kompleksem, to $\mathcal{K} \overset{\circ}{\times} \{t_1, t_2, , .., t_m\}$ $(n+1)-$ wymiarowym istotnym kompleksem.

Fakt 2 (= Lemat 4, str. 28). Jezeli ϕ jest funkcja kolorujaca wierzcholki $(n+1)-$ wymiarowego istotnego kompleksu $\mathcal{K} \overset{\circ}{\times} \{t_1, t_2, , .., t_m\}$ na $n+1$ kolorow i taka, ze kolor i nie jest przyjmowany na zadnym z wierzcholkow na scianie $\mathcal{F}_i^-$, natomiast kolor $i+1$ nie jest przyjmowany na zadnym z wierzcholkow na scianie $\mathcal{F}_i^+$, to wtedy istnieje kolekcja sympleksow $S_1, S_2, .., S_k$ z kompleksu $\mathcal{K} \overset{\circ}{\times} \{t_1, t_2, , .., t_m\}$ taki, ze na kazdym poziomie $\mathcal{K} \times \{t_i\}$ jeden z tych sympleksow ma wierzcholki pokolorowane wszystkimi $n+1$ kolorami.

W oparciu o dwa powyzsze fakty, otrzymuje sie wersje twierdzenia Poincaré - Mirandy dla istotnych wieloscianow. Konkretnie,

Jezeli $\mathcal{K}$ jest $n-$ wymiarowym istotnym kompleksem oraz $f = (f_1, f_2, .., f_n) : |\mathcal{K}| \to \mathbf{R}^n$ jest funkcja ciagla taka, ze $f_i\left(|F_i^-|\right) \subseteq (-\infty, 0]$ oraz $f_i\left(|F_i^+|\right) \subseteq [0, \infty)$ dla $i = 1, .., n$, to istnieje $c \in |\mathcal{K}|$ takie ze $f(c) = 0$.

Prawdziwa jest rowniez parametryczna wersja twierdzenia Poincaré - Mirandy dla istotnych kompleksow (zobacz Twierdzenie 5 na str. 32).

Rozdzial V. W dyskutowanych problemach z rozdzialu V, jeden wydaje sie byc dominujacy: uzyskac lepsze zrozumienie i wglad kiedy przyporzadkowania beda przybierac wartosci antypodyczne. Podejscie w stylu twierdzenia Lusternika - Schnilermana pozwolilo na uzyskanie podobnego efektu rozwazajac specjalne rodziny zbiorow zamiast funckcji. Natomiast Ky - Fan uzyl do tego celu podejscie kombinatoryczne.

Tak jak i oryginalne twierdzenie Borsuka - Ulama, podejscia pokryciowe i kombinatoryczne byly stosowane do sfer. O. Musin zapoczatkowal badania nad rozszerzeniem typu przestrzeni dla ktorych antypodycznosc (ze wzgledu na inwolucje) bylaby mozliwa. W 2015 roku, Musin, razem z A. Volovikowem wyroznili klase $PL-$ rozmailtosci dla ktorych twierdzenie o antypodach jest prawdziwe uzywajac do tego celu kombinatoryczne podejscie Ky - Fana (zob. pozycje [21] i [22] w rozprawie). W rozdziale V pokazana jest dalsza mozliwosc takiego uogolniania. W tym celu, wyroznia sie klase abstrakcyjnych kompleksow, tzw. $n-$ Borsuk - Ulam kompleksy i pokazuje sie mozliwosc przeniesienia kombinatorycznego twierdzenia Ky - Fana na te klase kompleksow (zob. Lemat 6, str. 38). Ze wzgledu na ograniczona roznorodnosc typow inwolucji mozliwych na $n-$ Barsuk - Ulam wieloscianach, otrzymane uogolnienia nie wychodza wystarczajaco daleko poza klase rozmaitosci wyroznionych przez Musina i Volvikowa.

Trzeba dodac na koncu, ze zdecydowana wiekszosc wynikow zaprezentowana w tym rozdziale zostala wzieta z (nieopublikowanej jeszcze wspolnej) pracy $[KTT]$.

Finalne komentarze i konkluzje. Tematyka studiowana w omawianej rozprawie doktorskiej siega swoimi korzenieniami do poczatkow XX wieku. Od tego czasu, byla ona ciaglym obiektem zainteresowan naukowcow zwiazanych bezposrednio z matematyka ale takze maukowcow zwiazanych z dziedzinami pozornie lezacych daleko od matematyki. Samo twierdzenie Brouwera w oryginalnej formie znalazlo multum zastosowan jak rowniez twierdzenie Brouwera ale w "przebraniu" uogolnionego twierdzenia Bolzano czy tez twierdzen antypodycznych. Wyniki zaprezentowane w tej rozprawie poszerzaja horyzont i mozliwosci dalszych zastosowan gdyz stosuja sie do znacznie szerszych klas przestrzeni niz znanych dotychczas. Odnosi sie to szczegolnie do rezultatow osiagnietych w rozdzialach III i IV. Wyniki zaprezentowane w rozdziale V potrzebuja jeszcze dodatkowych cyzelowan by staly sie tak wartosciowe jak wyniki z poprzednich dwoch rozdzialow.

Cala praca doktorska zawiera niedociagniecia, w wiekszosci typu redakcyjnego ale rowniez ma slabe punkty natury merytorycznej (zobacz czesc "Uwagi szczegolowe" tej recenzji). Nie maja one jednak zasadniczego wplywu na pozytywna ocene calosci.

W mojej opinii, praca doktorska spełnia wymagania Ustawy o tytule i stopniach naukowych i wnoszę o dopuszczenie Pani magister Marii Piekarskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Andrzej Szymanski

Uwagi

M. Piekarska "*Metody kombinatoryczne w teorii punktow stalych*"

p. 4, Abstract^2: "..to selected.."
p. 5^{10}: Brak cytatow prac zwiazanych ze wspomniana problematyka.
p. 5^{15}: Slowa "szachy" i "hex" nie trzeba pisac z duzej litery.
p. 7^7: "...Niech $A \subset R^d$...jest zwarta.."
p. 7_4: "...kazda sciana nalezy..."
p. 8 Definicja (#2): $\dim(S)$ zastapic przez $|S|$.
p. 8^{10}: Dodac "...gdzie $j \in [n+1]$..."
p. 8 Definicja (#3): dodac "abstrakcyjnego"
p. 8 Definicja (#4): Rozroznic miedzy kompleksem abstrakcyjnym i kompleksem.

p. 8 Definicja (#5): Definicja komplementarnych krawedzi powinna byc $\phi(a) = -\phi(b)$ (por. z def. na str. 37_{8-9}).

p. 8_4: Definicja (#6): Powinno byc $\phi(s_i) = j$.

p. 9 Definicja (#1): Brak kolorowania ϕ wierzcholkow $V(S)$.

p. 11: Brak cytatu kto udowodnil lemat Spernera o zbiorach laczacych. W sformulowaniu tego lematu brakuje "niech S_i, $i \in [n+1]$, bedzie numeracja wszystkich scian $(n-1)-$ wymiarowych sympleksu S, "

p. 12: Cytaty dwoch twierdzen Bapata sa podane bez zadnych wyjasnien ani dotyczacych terminologii (np. etykieta) ani zalozen. To samo dotyczy Twierdzenia Tkacza-Turzanskiego na str.13.

p.13: W definicji kompleksu abstrakcyjnego brakuje zalozenia, ze α jest permutacja.

p.13: Brakuje komentarzy dotyczacych autorstwa i referencji b. waznych pojec: kompleksu abstrakcyjnego i funkcji kolorujacej φ.

p. 16: Dowod twierdzenia 1 jest b. lakoniczny.

p. 19: Brak definicji przestrzeni silnie spojnej. A propos, taka terminologia jest raczej b. niefortunna gdyz autorka twierdzi, ze sa przestrzenie niespojne ktore sa silnie spojne.

p. 20: Ilustracja #2 dla Przykladu #4 jest mylaca; obrazuje ona sytuację gdy caly odcinek $[v_0, v_2]$ zostalby skolapsowany do punktu v_1, nie tylko trzy punkty v_0, v_1, v_2, .

p.21: W Przykladzie 6 (jak rowniez w wielu innych podobnych sytuacjach - vide uwagi, ponizej) uzyta jest zasada wieszcza Mickiewicza: "*Czucie i wiara silniej mówi do mnie Niż mędrca szkiełko i oko.*" $\approx$ "*A picture is worth a thousand words*" - zamiast formalnego opisu i dowodu, pokazana jest tylko ilustracja (nota bene, wszystkie ilustracje w tekscie sa zrobione doskonale). W niektorych sytuacjach jest to bardzo pomocne i wrecz konieczne. Jednakze nie zawsze a szczegolnie w tak zaawansowanym tekscie jakim jest rozprawa doktorska; ilustracja powinna raczej sluzyc jako element ulatwiajacy zrozumienie formalnych argumentow. Formalizacja stala by sie latwiejsza gdyby ilustracje zostaly zrobione a'la "Meinecraft" - popularna gra komputerowa.

p. 21: Definicja 6, linia 2: "*Zauważmy, że ogólnie, jeśli* $|K^n|$ *jest* $n-$ *istotnym wieloscianem, to wtedy* $|K^n| \times [0,1]$ *jest* $(n+1)-$ *istotnym wieloscianem*", jest nietrywialnym stwierdzeniem. Formalny dowod jest konieczny.

p.23: Definicja 5 kompleksu $dc(S)_b^a$ jest identyczna z definicja "$S-$ doubled complex" z pracy [19].

p. 24: Linia 1: Co to znaczy '$K^n = \{w_1, ..., w_n\}$ jest $n-$ istotnym kompleksem" (por. z Definicja 3 na str. 19).

p. 24: Definicja 6 wymaga dodania zalozenia, ze $t_1 <, ..., t_{l+1}$.

p.26: Caly paragraf (linie 4 - 6) powinien byc przeniesiony do dowodu Lematu 3 i umieszczony w linii 17. Na koncu linii 17, zastapic "skladowych" przez "sciezek". To samo, w linii 2 od konca jak rowniez liniach 1 i 3 na kolejnej stronie.

p. 26: Linia 2 od konca: jak rozumiec znaczenie slowa *zajmuja* w zdaniu "Zauważmy, że wszystkie składowe opisane w (1) zajmują parzystą liczbę $n-$ pokolorowanych $(n-1)-$ sympleksów z $\mathcal{F}_{\bar{n}}$"?

p.27: Jak rozumiec stwierdzenie w liniach 4 i 5: "Podsumowując powyższe rozumowanie otrzymujemy nieparzystą liczbę $(n+1)-$ pokolorowanych $n-$ sympleksów w K^n." ?

p. 30: Twierdzenie 2, linia 2: Powinno byc $...\{H_i^-, H_i^+\}, i \in [n]...$

p. 30: Dowod Twierdzenia 2, linie 1 - 2: "Dla każdego $k \in N$, rozważmy podział $K^n(k)$ kompleksu K^n taki, że średnica jest mniejsza niż $1/k$.". W calej pracy nie ma wzmianki o tym jak mozna takie podzialy skonstruowac. Co wiecej, z dalszego ciagu dowodu mozna sie domyslec, ze takie podzialy powinne byc tego samego typu jak oryginalny caly kompleks!

p. 30: Definicja 7, linia 2: Powinno byc $\left|K^n \overset{\circ}{\times} L\right|$.

p. 33: Twierdzenie (Lemat Tuckera), linia 3: Co to jest $\partial\mathcal{B}^n$?

p. 34: Obiekty nazywane $n-$ *Borsuk-Ulam wieloscianami*, jak w Definicji 9, maja raczej ograniczony zakres. W pierwszej linii tej definicji zaklada sie, ze $\alpha : |BU^n| \to |BU^n|$ jest inwolucja bez punktow stalych spelniajaca m.in. warunek (B), ktory wymaga by α bylo afiniczne na kazdym sympleksie z BU^n. Oznacza to, ze $\alpha(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, gdzie A jest macierza. Zatem $\mathbf{x} = \alpha\alpha(\mathbf{x}) = \alpha(A\mathbf{x} + \mathbf{b}) = A(A\mathbf{x} + \mathbf{b}) + \mathbf{b}$. Stad $A^2 = I$ oraz $A\mathbf{b} = -\mathbf{b}$.

p. 34: Definicja 8 warunek (B): Brak pelnej definicji symbolu $\alpha(\mathcal{B})$; przypuszczalnie, $\alpha(\mathcal{B}) = \{\alpha(S) : S \in \mathcal{B}\}$. Jednakze, poprawnosc takiej definicji wymaga pokazania przedtem, ze $\alpha(S)$ jest sympleksem z $\mathcal{BU}^n$, t.j. udowodnienia punktu (1) Obserwacji 4, na str. 37.

p. 34: Brak zalozenia, ze $\mathcal{B} \cap \alpha(\mathcal{B})$ **razem** z $\alpha|\mathcal{B} \cap \alpha(\mathcal{B})$ tworzy $(n-1)-$ Borsuk - Ulam kompleks.

p. 35, 36: Zobacz komentarz odnoszacy sie do p. 21.

p. 37: Definicja pozytywnego/negatywnego sympleksu powinna byc: ...., $(-1)^{k+1} i_k$ / ...., $(-1)^k i_{k+1}$

p. 38: Obserwacja 5 jest wazna gdy $n \geq 2$.

p.38: W Obserwacji 6, co to znaczy ze "φ jest antypodyczna funkcja kolorujaca"? Nota bene, definicja jest podana ale pozniej, na str. 39[1].

p. 38: W Definicji 10, $\mathcal{A} \subset \mathcal{BU}^n$ jest zbedne. Trzeba tez wyraznie wspomniec o funkcji kolorujacej.

p. 39: Stwierdzenie "istnieje nieparzysta liczba pozytywnych $k-$ sympleksów" (zob. linia 3 i 6 od gory oraz linia 1 od dolu) jest niepoprawne jako zalozenie indukcyjne jak rowniez jako koncowe stwierdzenie. To samo odnosi sie do dowodu grafowego na str. 40.

p. 41: W linii 6, usunac "*Na poczatku*".

p. 42: Co więcej,

p. 47: Referencja [4] ma niekompletna informacje.

Dygresja. Recenzowana praca doktorska posiada niedociagniecia typu redakcyjnego. Wiele wynikow podanych jest bez komentarza, ktory pozwolilby na ocenienie czy wynik jest zupelnie nowy czy tez jest uogolnieniem znanego wczesniej.

Innym niedociagnieciem, bardzo klopotliwym dla kazdego czytelnika, nie tylko dla tego recenzenta, jest brak wyjasnien wielu szczegolow i lakoniczne stwierdzenia wielu nieoczywistych faktow. Za to nie mozna winic samej doktorantki ale raczej obu promotorow. Wydaje sie, ze akceptacja z ich strony takiego stanu rzeczy byla uzasadniona tym, ze wiele niedomowien z rozprawy mozna wyjasnic sobie samemu lub odkrywajac je dodatkowo pracach juz opublikowanych.